UNE INTRODUCTION AUX INVARIANTS DE CHERN–SIMONS

GWÉNAËL

Résumé. Cette note, informelle et imprécise, accompagne un exposé donné le 30 janvier 2008 au « Séminaire G3 » à Strasbourg. Nous présentons l'article où Chern et Simons introduisent les formes et les invariants qui portent désormais leurs noms.

Table des matières

1. Introduction

Soit M une 3-variété lisse fermée orientée et soit $A \in \Omega^1(M; \mathfrak{su}(2))$, une 1-forme sur M à valeurs dans $\mathfrak{su}(2)$. On pose

$$\mathrm{CS}(A) := \frac{1}{8\pi^2} \int_M \mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}A \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\right) \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

On peut interpréter A comme une connexion ω sur un SU(2)-fibré principal au-dessus de M, sitôt qu'on a trivialisé celui-ci. L'*invariant de Chern–Simons* de ω est

$$\mathrm{CS}(\omega) := \{\mathrm{CS}(A)\} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

et ne dépend pas du choix de la trivialisation.

Cet invariant joue un rôle important en topologie de dimension 3 : il est fondamental dans la définition de l'homologie des instantons par Floer [4] (cf. exposé d'Alex ?) ou, encore, dans la « définition » des invariants quantiques de Witten [12]. Leur calcul met en jeu la variété des caractères d'une variété de dimension trois [6] (cf. exposé de François ?).

Néanmoins, cet invariant apparaît dans l'article original de Chern et Simons [2] dans un contexte beaucoup plus général avec, à la clef, quelques résultats géométriques. Nous aimerions expliquer cette généralité et comprendre, notamment, comment l'invariant de Chern–Simons surgit de la théorie de Chern–Weil. A la fin de cette note, nous revenons à la dimension trois et retrouvons la formule (1.1).

Dans la suite, nous nous plaçons dans la catégorie lisse. Toute variété est supposée compacte et sans bord.

2. Rappels sur les classes caractéristiques

On rappelle brièvement la définition des classes de Chern d'un fibré vectoriel complexe, avec le point de vue de la théorie d'obstruction [11]. Viennent ensuite les classes de Pontrjagin.

2.1. **Variétés de Stiefel complexes.** Soit $k = 1, \ldots, n$ et soit $V_k(\mathbb{C}^n)$ la *variété de Stiefel* des k-repères unitaires dans $\mathbb{C}^n$:

$$V_k(\mathbb{C}^n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{C}) : A^* \cdot A = I_k\}.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a le difféomorphisme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{U}(n)/\,\mathrm{U}(n-k) & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & V_k(\mathbb{C}^n) \\ \{A\} & \longmapsto & (A\cdot e_1, \ldots, A \cdot e_k) \end{array} \right.$$

où $\mathrm{U}(n-k)$ est vu comme sous-groupe de $\mathrm{U}(n)$ par stabilisation à gauche : $A \mapsto I_k \oplus A$.

Les premiers groupes d'homotopie non-triviaux des variétés de Stiefel sont bien connus :

Lemme 2.1. *La variété de Stiefel $V_k(\mathbb{C}^n)$ est connexe par arcs, et on a*

$$\pi_i(V_k(\mathbb{C}^n)) \cong \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } i < 2n-2k+1, \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = 2n-2k+1. \end{array} \right.$$

A propos de la démonstration. Ceci se démontre à partir de la suite longue en homotopie induite par le fibré

$$S^{2n-2k+1} \rightarrowtail V_k(\mathbb{C}^n) \xrightarrow[\text{dernier vecteur}]{\text{oubli du}} \!\!\!\!\rightarrow V_{k-1}(\mathbb{C}^n).$$

Sa fibre donne le générateur de $\pi_{2n-2k+1}(V_k(\mathbb{C}^n))$. Consulter [11, §25]. $\square$

2.2. **Classes de Chern.** Soit ξ un fibré vectoriel complexe de dimension n sur un CW-complexe :

$$\mathbb{C}^n \rightarrowtail \xi \twoheadrightarrow B.$$

On *choisit* sur ξ une métrique hermitienne, ce qui nous autorise à considérer le fibré $V_k(\xi)$ de ses k-repères unitaires :

$$V_k(\mathbb{C}^n) \rightarrowtail V_k(\xi) \twoheadrightarrow B.$$

D'après le Lemme 2.1, on peut construire une section de $V_k(\xi)$ sur le $(2n-2k+1)$-squelette de B, mais on trouve dans

$$H^{2n-2k+2}\big(B; \pi_{2n-2k+1}(V_k(\xi))\big)$$

une obstruction pour étendre cette section au $(2n-2k+2)$-squelette. Ici, le fibré de coefficients $\pi_{2n-2k+1}(V_k(\xi))$ est trivial puisque le groupe structurel $\mathrm{U}(n)$ de $V_k(\xi)$ est connexe. Nous notons

$$c_{n-k+1}(\xi) \in H^{2n-2k+2}(B; \mathbb{Z})$$

cette obstruction primaire.

Définition 2.2. La *i-ème classe de Chern* de ξ est $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$ avec $i = 1, \ldots, n$.

Les classes de Chern ne dépendent pas du choix de la métrique hermitienne puisque, par le procédé de Gram–Schmidt, $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ se rétracte par déformation à $\mathrm{U}(n)$.

Proposition 2.3. *Soit ξ un fibré vectoriel complexe de dimension n et de base B. Il existe k sections linéairement indépendantes de ξ définies sur le $(2n-2k+2)$-squelette de B si, et seulement si, on a*

$$c_{n-k+1}(\xi) = 0 \in H^{2n-2k+2}(B; \mathbb{Z}).$$

Démonstration. C'est la définition même des classes de Chern que nous avons adoptée dans cette note. □

2.3. **Classes de Pontrjagin.** Soit ξ un fibré vectoriel réel de dimension n sur un CW-complexe :

$$\mathbb{R}^n \rightarrowtail \xi \twoheadrightarrow B.$$

Nous notons $\xi \otimes \mathbb{C}$ son complexifié.

Définition 2.4. La *i-ème classe de Pontrjagin* de ξ est

$$p_i(\xi) := (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C}) \in H^{4i}(B; \mathbb{Z})$$

avec $i = 1, \ldots, [n/2]$.

Remarque 2.5. Soit $r : H^*(B; \mathbb{Z}) \to H^*(B; \mathbb{R})$ l'homomorphisme canonique. Les résultats de §3 entraîneront que $r(c_{2i+1}(\xi \otimes \mathbb{C})) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

3. Rappels sur la théorie de Chern–Weil

La théorie de Chern–Weil donne une description géométrique de certaines classes caractéristiques lorsque la base du fibré est une variété et que le fibré est équipé d'une connexion. On pourra consulter [7, §II] pour la théorie des connexions et [7, §XII] pour la théorie de Chern–Weil. D'autres références possibles sont [8, Appendix C] et [9].

Dans la suite, G est un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ est son algèbre de Lie. On note $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, l'action adjointe de $g \in G$.

3.1. **Connexion et courbure.** Soit X un G-fibré principal sur une variété :

$$G \rightarrowtail X \xrightarrow{p} M.$$

L'action à droite par $g \in G$ est notée

$$R_g : X \longrightarrow X.$$

Pour tout $x \in X$, la *partie verticale* de T_xX est

$$V_xX := \{v \in T_xX : \mathrm{d}p(v) = 0\}.$$

Le difféomorphisme $\tau_x : G \to p^{-1}(p(x))$ défini par $\tau_x(g) := R_g(x)$ induit au niveau des espaces tangents un isomorphisme

$$\mathrm{d}\tau_x : T_1G \xrightarrow{\simeq} T_xp^{-1}(p(x))$$

qui nous permet d'identifier $\mathfrak{g}$ à V_xX.

Définition 3.1. Une *forme de connexion* sur X est une 1-forme sur l'espace total de X à valeurs dans $\mathfrak{g}$

$$\omega \in \Omega^1(X; \mathfrak{g})$$

qui est G-équivariante :

$$R_g^*(\omega) = \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ \omega \quad \forall g \in G,$$

et qui est verticalement l'identité :

$$\omega(v) = v \quad \forall x \in X,\ \forall v \in V_xX \simeq \mathfrak{g}.$$

Une connexion ω définit un champ de plans « horizontaux » sur l'espace total de X, considérés comme « parallèles » à sa base M. Plus précisément, pour tout $x \in X$, la *partie horizontale* de T_xX définie par ω est

$$H_xX := \{v \in T_xX : \omega(v) = 0\}.$$

On a $T_xX = H_xX \oplus V_xX$ et $\mathrm{d}R_g(H_xX) = H_{R_g(x)}X$, pour tout $g \in G$. Nous notons h la projection de TX sur sa partie horizontale.

Définition 3.2. La *forme de courbure* d'une connexion ω sur X est

$$\Omega := \mathrm{d}\omega \circ (h \otimes h) \ \in \Omega^2(X; \mathfrak{g}).$$

Une connexion de courbure nulle est dite *plate*.

On vérifie facilement que Ω est elle-aussi G-équivariante. De plus, on a l'*équation de structure* pour la courbure :

$$\mathrm{d}\omega = \Omega - \frac{1}{2}[\omega, \omega]. \tag{3.1}$$

Cette équation et l'identité de Jacobi pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ entraînent l'*identité de Bianchi* pour la courbure :

$$\mathrm{d}\Omega = [\Omega, \omega]. \tag{3.2}$$

Exemple 3.3. Soit $\omega_G \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ la *forme de Maurer–Cartan*, définie par

$$\omega_G(\mathrm{d}L_x(v)) := v \quad \forall x \in G, \forall v \in \mathfrak{g}.$$

Considérant G comme un G-fibré principal sur le point, ω_G est un connexion plate sur G et (3.1) devient l'*équation de Maurer–Cartan* :

$$\mathrm{d}\omega_G = -\frac{1}{2}\left[\omega_G, \omega_G\right].$$

3.2. **Conventions pour les produits extérieurs.** Soit N une variété et soient V, W des espaces vectoriels. Il est temps de préciser nos conventions pour les produits extérieurs des formes différentielles.

Etant données deux formes $\alpha \in \Omega^a(N;V)$ et $\beta \in \Omega^b(N;W)$, on définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{a+b}(N; V \otimes W)$ de la façon ordinaire par

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{a+b}) &= \frac{1}{(a+b)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{a+b}} \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(a)}) \otimes \beta(v_{\sigma(a+1)}, \dots, v_{\sigma(a+b)}) \\ &= \frac{a!b!}{(a+b)!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{a+b} \\ \sigma:\text{shuffle}}} \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(a)}) \otimes \beta(v_{\sigma(a+1)}, \dots, v_{\sigma(a+b)}). \end{aligned}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier où $V = W$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Nous notons[1]

$$[\alpha, \beta] := [\cdot,\cdot] \circ (\alpha \wedge \beta) \ \in \Omega^{a+b}(N; \mathfrak{g}),$$

où $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est le crochet de Lie. Parfois, lorsque $G \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ est un groupe de matrices, nous noterons[2]

$$\alpha \wedge \beta := m \circ (\alpha \wedge \beta) \ \in \Omega^{a+b}(N; \mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})) \tag{3.3}$$

où $m : \mathfrak{gl}(n;\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{gl}(n;\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$ est la multiplication des matrices.

3.3. **Polynômes invariants.** Soit $I^d(G)$ l'espace des formes $f : \mathfrak{g}^{\otimes d} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont symétriques et *G-invariantes*, i.e.

$$f(\mathrm{Ad}_g\, v_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{Ad}_g\, v_d) = f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \quad \forall g \in G,\ \forall v_1, \dots, v_d \in \mathfrak{g}.$$

L'*algèbre* des formes multilinéaires, symétriques et G-invariantes est

$$I(G) := \bigoplus_{d=0}^{\infty} I^d(G)$$

avec la multiplication évidente.

Remarque 3.4. La donnée de $f \in I^d(G)$ équivaut à la donnée d'une fonction polynômiale $P : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, de degré d et G-invariante, qui serait définie par $P(v) = f(v \otimes \cdots \otimes v)$.

Considérons maintenant deux exemples : $G = \mathrm{U}(n)$ et $G = \mathrm{O}(n)$.

Théorème 3.5. *On définit $C_j \in I^j(\mathrm{U}(n))$, pour tout $j = 0, \dots, n$, par*

$$\det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2i\pi} A\right) = \sum_{j=0}^{n} C_j(A \otimes \cdots \otimes A) \cdot \lambda^{n-j} \quad \forall A \in \mathfrak{u}(n).$$

Alors, l'algèbre $I(\mathrm{U}(n))$ est polynômiale sur $C_1, \dots, C_n$.

A propos de la démonstration. Voir [7, Theorem XII.2.5] par exemple. Notons juste que $C_1, \dots, C_n$ sont effectivement G-invariantes, puisque

$$\det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2i\pi} PAP^{-1}\right) = \det\left(P \cdot \left(\lambda I_n - \frac{1}{2i\pi} A\right) \cdot P^{-1}\right) = \det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2i\pi} A\right)$$

pour tout $P \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$. De plus, le fait que

$$\det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2i\pi} A\right) = \det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2i\pi} A^t\right) = \overline{\det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2i\pi} A\right)}$$

[1] C'est cette convention que nous avons utilisée dans (3.1) et dans (3.2).

[2] C'est cette convention que nous avons utilisée dans (1.1).

pour tout $A \in \mathfrak{u}(n)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous assure que chaque polynôme C_i est à valeurs réelles. $\square$

Théorème 3.6. *On définit $P_j \in I^{2j}(\mathrm{O}(n))$, pour tout $j = 0, \ldots, [n/2]$, par*

$$\det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2\pi}A\right) = \sum_{j=0}^{[n/2]} P_j(A \otimes \cdots \otimes A) \cdot \lambda^{n-2j} \quad \forall A \in \mathfrak{o}(n).$$

Alors, l'algèbre $I(\mathrm{O}(n))$ est polynômiale sur $P_1, \ldots, P_{[n/2]}$.

A propos de la démonstration. Voir [7, Theorem XII.2.6] par exemple. Vérifions seulement que, pour tout $A \in \mathfrak{o}(n)$, chaque $Q_{2j+1}(A)$ dans l'expression

$$\det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2\pi}A\right) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(A \otimes \cdots \otimes A) \cdot \lambda^{n-k}$$

doit être nul. En effet, on a

$$\det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2\pi}A\right) = \det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2\pi}A^t\right) = \det\left(\lambda I_n + \frac{1}{2\pi}A\right)$$

si bien que $Q_{2j+1}(A \otimes \cdots \otimes A) = -Q_{2j+1}(A \otimes \cdots \otimes A)$. $\square$

3.4. **L'homomorphisme de Weil.** Soit X un G-fibré principal sur une variété :

$$G \rightarrowtail X \xrightarrow{p} \twoheadrightarrow M$$

et soit ω une connexion sur X. Pour tout $P \in I^l(G)$, nous notons

$$P(\Omega) := P \circ (\underbrace{\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega}_{l}) \in \Omega^{2l}(X).$$

Théorème 3.7 (Weil)**.** *La forme $P(\Omega)$ provient d'une $(2l)$-forme sur M, notée*

$$p_*P(\Omega) \in \Omega^{2l}(M),$$

qui est fermée et dont la classe d'homologie ne dépend pas de ω. De plus, l'application

$$\left\{ \begin{array}{lcl} I(G) & \longrightarrow & H^*(M; \mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & \{p_*P(\Omega)\} \end{array} \right.$$

est un homomorphisme d'algèbres.

Démonstration de Chern [7]*.* Puisque Ω est G-équivariante et « horizontale », i.e.

$$\Omega(v_1, v_2) = 0 \quad \text{si } v_1 \text{ ou } v_2 \text{ est vertical},$$

$P(\Omega)$ est G-invariante et horizontale. Donc, $P(\Omega)$ est le pull-back par p d'une (unique) $(2l)$-forme $p_*P(\Omega)$ sur M.

Ensuite, l'identité de Bianchi (3.2) entraîne que

$$\mathrm{d}P(\Omega) = P \circ \mathrm{d}(\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega) = \sum_{i=1}^{l} P \circ (\Omega \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega) = \sum_{i=1}^{l} P \circ (\Omega \wedge \cdots \wedge [\Omega, \omega] \wedge \cdots \wedge \Omega),$$

ce qui s'annule du fait de la $\mathfrak{g}$-invariance de P. Ainsi, $p_*P(\Omega)$ est fermée.

Montrons maintenant que la classe de cohomologie $\{p_*P(\Omega)\}$ ne dépend pas de ω. Soit ω' une autre connexion sur X. On relie ω' à ω par le chemin linéaire de connexions

$$\omega_t := \omega' + t(\omega - \omega') \quad \forall t \in [0, 1].$$

Soit la $(2l-1)$-forme sur X

$$TP(\omega',\omega) := l \int_0^1 P \circ \big((\omega-\omega') \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big)\,\mathrm{d}t$$

où Ω_t est la courbure de ω_t. Puisque $(\omega-\omega')$ et Ω_t sont G-équivariantes et horizontales, $TP(\omega',\omega)$ est elle-même G-invariante et horizontale et, donc, provient d'une (unique) $(2l-1)$-forme sur M. Pour conclure que $p_*P(\Omega)$ et $p_*P(\Omega')$ sont cohomologues, il suffit donc de montrer que

$$\mathrm{d}TP(\omega',\omega) \overset{?}{=} P(\Omega) - P(\Omega'). \tag{3.4}$$

Soit $f(t) := P(\Omega_t)$. On a bien sûr

$$\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = P(\Omega) - P(\Omega'),$$

nous sommes donc ramenés à montrer que

$$f'(t) \overset{?}{=} lP \circ \mathrm{d}\big((\omega-\omega') \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big)\,. \tag{3.5}$$

Ayant l'égalité

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{d}\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t,\omega_t]\right) = \mathrm{d}\,(\omega-\omega') + [\omega-\omega',\omega_t],$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} f'(t) &= P \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t) = l \cdot P \circ \left(\frac{\mathrm{d}\Omega_t}{\mathrm{d}t} \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\right) \\ &= l \cdot P \circ \big(\mathrm{d}\,(\omega-\omega') \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big) + l \cdot P \circ \big([\omega-\omega',\omega_t] \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big)\,. \end{aligned}$$

D'un autre côté, nous obtenons

$$\begin{aligned} & lP \circ \mathrm{d}\big((\omega-\omega') \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big) \\ = \;& lP \circ \big(\mathrm{d}(\omega-\omega') \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big) - l(l-1)P \circ \big((\omega-\omega') \wedge \mathrm{d}\Omega_t \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big) \\ \overset{(3.2)}{=} \;& lP \circ \big(\mathrm{d}(\omega-\omega') \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big) - l(l-1)P \circ \big((\omega-\omega') \wedge [\Omega_t,\omega_t] \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big)\,. \end{aligned}$$

La $\mathfrak{g}$-invariance de P entraîne la nullité de

$$P \circ \big([(\omega-\omega'),\omega_t] \wedge \Omega_t \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big) + (l-1)P \circ \big((\omega-\omega') \wedge [\Omega_t,\omega_t] \wedge \Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t\big)\,.$$

On conclut que (3.5) est satisfaite. □

3.5. **Classes caractéristiques et courbure.** Soit $r : H^*(M;\mathbb{Z}) \to H^*(M;\mathbb{R})$ l'homomorphisme canonique. Voici une description géométrique des classes de Chern à coefficients réels :

Théorème 3.8. *Soit ξ un fibré vectoriel complexe de dimension n sur une variété M. Equipant ξ d'une métrique hermitienne, on considère le fibré de ses repères unitaires*[3] *:*

$$\mathrm{U}(n) \rightarrowtail F_{\mathrm{U}}(\xi) \overset{p}{\twoheadrightarrow} M.$$

Si ω est une connexion sur $F_{\mathrm{U}}(\xi)$ de courbure Ω, on a alors

$$r(c_i(\xi)) = \{p_*C_i(\Omega)\} \in H^{2i}(M;\mathbb{R})$$

pour tout $i = 1,\ldots,n$.

[3] On a $F_{\mathrm{U}}(\xi) = V_n(\xi)$ avec les notations de §2.1.

Ici, C_i est le polynôme $\mathrm{U}(n)$-invariant défini dans le Théorème 3.5. Ce théorème montre aussi qu'on ne peut pas définir géométriquement d'autres classes caractéristiques que les classes de Chern.

A propos de la démonstration. Soit la classe de Chern *totale* de ξ :

$$c(\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\xi) \in H^*(M;\mathbb{Z})$$

où $c_0(\xi) = 1$ et $c_j(\xi) = 0$ pour tout $j > \dim(\xi)$. La classe de Chern totale possède les propriétés suivantes :

- $c(\xi)$ est naturelle,
- $c(\xi)$ est multiplicative sous somme de Whitney,
- si ξ est le fibré en lignes canonique sur $\mathbb{C}P^1$, on a $\langle c_1(\xi), [\mathbb{C}P^1]\rangle = -1 \in \mathbb{Z}$.

Ces mêmes propriétés valent aussi à coefficients réels, et elles caractérisent les classes de Chern à coefficients réels [5, §17.5]. Il suffit donc de montrer que

$$c'(\xi) := 1 + \sum_{j=0}^{\dim(\xi)} \{p_* C_j(\Omega)\}$$

possède ces mêmes propriétés : voir [7, Theorem XII.3.1]. □

Exemple 3.9. Soit M une surface orientée connexe, munie d'une métrique riemannienne. Son fibré tangent orienté peut être vu comme un fibré ξ en lignes complexe, puisque $\mathrm{SO}(2) = \mathrm{U}(1)$. D'après la Proposition 2.3,

$$c_1(\xi) \in H^2(M;\mathbb{Z})$$

est l'obstruction pour trouver un champs de vecteurs non-singuliers sur M. Par le théorème de Hopf–Poincaré, on a donc

$$\langle c_1(\xi), [M]\rangle = \chi(M).$$

Par ailleurs, on peut équiper le fibré des repères orthonormés directs de M

$$\mathrm{SO}(2) \rightarrowtail F_{\mathrm{SO}}M \xrightarrow{p} M$$

avec la connexion riemannienne[4] ω. Puisque $F_{\mathrm{SO}}M = F_{\mathrm{U}}(\xi)$, on déduit du Théorème 3.8 la formule

$$-\frac{1}{2\pi}\int_M p_*\Omega = \chi(M)$$

où $\mathfrak{so}(2)$ est identifié avec $\mathbb{R}$. C'est essentiellement le théorème de Gauss–Bonnet.

Voici une description géométrique des classes de Pontrjagin à coefficients réels :

Théorème 3.10. *Soit ξ un fibré vectoriel réel de dimension n sur une variété M. Equipant ξ d'une métrique euclidienne, on considère le fibré de ses repères orthonormés :*

$$\mathrm{O}(n) \rightarrowtail F_{\mathrm{O}}(\xi) \xrightarrow{p} M.$$

Pour toute connexion ω sur $F_{\mathrm{O}}(\xi)$ de courbure Ω, on a alors

$$r(p_j(\xi)) = \{p_* P_j(\Omega)\} \in H^{4j}(M;\mathbb{R})$$

pour tout $j = 1, \ldots, [n/2]$.

---

[4] Voir §5.1 pour de brefs rappels.

Ici, P_j est le polynôme $\mathrm{O}(n)$-invariant défini dans le Théorème 3.5. Ce théorème montre aussi qu'on ne peut pas définir géométriquement d'autres classes caractéristiques que les classes de Pontrjagin.

Démonstration. Il découle des définitions que

$$\forall A \in \mathfrak{o}(n), \quad C_{2j}(A \otimes \cdots \otimes A) = (-1)^j P_j(A \otimes \cdots \otimes A).$$

Puisque $p_j(\xi) = (-1)^j c_j(\xi \otimes \mathbb{C})$, nous pouvons conclure grâce au Théorème 3.8. □

4. Formes de Chern–Simons

Nous pouvons maintenant rentrer au coeur de l'article de Chern et Simons [2].

4.1. **Définition.** Soit un G-fibré principal X sur une variété

$$G \rightarrowtail X \overset{p}{\twoheadrightarrow} M$$

et soit ω une connexion sur X de courbure Ω. Soit aussi $P \in I^l(G)$.

Définition 4.1. La *forme de Chern–Simons* de ω relative à P est

$$TP(\omega) := l \int_0^1 P \circ (\omega \wedge \underbrace{\Omega_t \wedge \cdots \wedge \Omega_t}_{l-1})\, \mathrm{d}t \ \in \Omega^{2l-1}(X) \tag{4.1}$$

où $\Omega_t \in \Omega^2(X; \mathfrak{g})$ est défine par $\Omega_t := t\Omega + \frac{1}{2}(t^2 - t) \cdot [\omega, \omega]$.

Voici le « Lemme fondamental » de la théorie de Chern–Simons :

Lemme 4.2. *On a* $\mathrm{d}TP(\omega) = P(\Omega)$.

Démonstration. On relie la connexion ω à la 1-forme nulle par le chemin linéaire

$$\omega_t := t \cdot \omega \quad \forall \in [0, 1].$$

On vérifie facilement l'égalité

$$\mathrm{d}\omega_t = \Omega_t - \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t]$$

suggèrant que Ω_t est la « courbure » de la « pseudo-connexion » ω_t. Nous avons ainsi

$$TP(\omega) = TP(\omega', \omega) \qquad \text{avec } \omega' := 0$$

où $TP(\omega', \omega)$ a été introduite dans la preuve du Théorème 3.7. Le même calcul que celui qui nous avait conduit à (3.4), donne donc

$$\mathrm{d}TP(\omega) = P(\Omega) - P(0) = P(\Omega).$$

□

En intégrant les monômes en t dans (4.1), on obtient la formule suivante :

$$TP(\omega) = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(-1)^j l!(l-1)!}{2^j (l+j)!(l-1-j)!} \cdot P \circ (\omega \wedge \underbrace{[\omega, \omega] \wedge \cdots \wedge [\omega, \omega]}_{j} \wedge \underbrace{\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega}_{l-j-1}). \tag{4.2}$$

4.2. **Quelques propriétés.** Voici maintenant quelques propriétés des formes de Chern–Simons : on en trouvera d'autres dans [2, §3]. Soit un G-fibré principal sur une variété

$$G \rightarrowtail X \overset{p}{\twoheadrightarrow} M$$

et soit aussi $P \in I^l(G)$.

Proposition 4.3. *Soit $(\omega_t)_{t\in[0,1]}$ un chemin de connexions sur X. Notant $\omega := \omega_0$ et $\omega' := \frac{\mathrm{d}\omega_t}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$, nous avons*

$$\left.\frac{\mathrm{d}TP(\omega_t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = l \cdot P(\omega' \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega) + (\mathit{exact}) \ \in \Omega^{2l-1}(X). \tag{4.3}$$

Démonstration. En utilisant que $\mathrm{d}TP(\omega_t) = P(\Omega_t)$, on obtient

$$\mathrm{d}\ \left.\frac{\mathrm{d}TP(\omega_t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = lP(\Omega' \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega) \tag{4.4}$$

où $\Omega' := \frac{\mathrm{d}\Omega_t}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$. Un autre calcul simple utilisant l'identité de Bianchi (3.2) et la $\mathfrak{g}$-invariance de P montre que

$$\mathrm{d}\ lP(\omega' \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega) = lP(\mathrm{d}\omega' \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega) + lP([\omega', \omega] \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega).$$

L'équation de structure (3.1) entraîne que $\mathrm{d}\omega' = \Omega' - [\omega', \omega]$. On en déduit donc que

$$\mathrm{d}\ lP(\omega' \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega) = lP(\Omega' \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega). \tag{4.5}$$

D'après (4.4) et (4.5), nous avons donc

$$\mathrm{d}\ \left.\frac{\mathrm{d}TP(\omega_t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \mathrm{d}\ lP(\omega' \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega)$$

ce qui entraînerait (4.3) si X avait le bon goût d'être acyclique. On peut toujours se ramener à cette situation en considérant un objet n-classifiant $(\overline{X}, \overline{\omega})$ pour la catégorie des G-fibrés principaux sur des variétés avec connexion [10]. Ici, n est choisi de sorte que $n \geq \dim(M)$ et n est assez grand par rapport à l pour que $H^{2l-1}(\overline{X}; \mathbb{R}) = 0$. □

Proposition 4.4. *Si $\dim(M) \leq 2l - 1$, alors la forme $TP(\omega)$ est fermée. De plus,*

$$\{TP(\omega)\} \in H^{2l-1}(X; \mathbb{R})$$

ne dépend pas de ω si $\dim(M) < 2l - 1$.

Démonstration. La forme $P(\Omega)$ provient d'une $2l$-forme sur M, qui doit être nulle puisque $\dim(M) < 2l$. Donc, $P(\Omega)$ est triviale et $TP(\omega)$ est fermée. Ensuite, d'après la Proposition 4.3, une variation de $TP(\omega)$ par rapport à ω est exacte sitôt que

$$P(\alpha \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega) = 0$$

pour toute $\alpha \in \Omega^1(X; \mathfrak{g})$ qui est G-équivariante et horizontale. Mais, pour un tel α, la forme $P(\alpha \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega)$ provient d'une $(2l-1)$-forme sur M, qui doit s'annuler si $\dim(M) < 2l - 1$. □

4.3. **Intégralité.** A tout $P \in I^l(G)$, nous associons la forme différentielle

$$TP := \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1} \cdot \mathrm{C}^l_{2l-1}} P(\omega_G \wedge [\omega_G, \omega_G] \wedge \cdots \wedge [\omega_G, \omega_G]) \ \in \Omega^{2l-1}(G)$$

où ω_G est la forme de Maurer–Cartan. Regardant G comme un G-fibré principal sur le point, on remarque que $TP = TP(\omega_G)$ d'après (4.2). Donc, TP est fermée et on peut donc considérer

$$\{TP\} \in H^{2l-1}(G; \mathbb{R}).$$

Définition 4.5. Un polynôme $P \in I^l(G)$ est *de nature entière* si $\{TP\} \in r(H^{2l-1}(G; \mathbb{Z}))$.

Les polynômes de nature entière nous intéresseront en §6 pour la raison suivante :

Lemme 4.6. *Soit un G-fibré principal sur une variété*

$$G \rightarrowtail X \xrightarrow{p} \!\!\!\!\rightarrow M$$

et soit ω une connexion sur X. Si $P \in I^l(G)$ est de nature entière, alors $TP(\omega)$ est « entière » sur chaque fibre F de X :

$$\{TP(\omega)|_F\} \in r(H^{2l-1}(F; \mathbb{Z})) \subset H^{2l-1}(F; \mathbb{R}).$$

Démonstration. Soit $x \in F$. Le difféomorphisme $\tau_x : G \to F$ défini par $\tau_x(g) := R_g(x)$ vérifie $\tau_x^*(\omega|_F) = \omega_G$ et donc $\tau_x^*(TP(\omega)|_F) = TP$. □

Voici un critère d'« intégralité » pour les polynômes :

Lemme 4.7 (Transgression)**.** *Soit $P \in I^l(G)$ avec la propriété suivante : pour tout G-fibré principal sur une variété*

$$G \rightarrowtail X \xrightarrow{p} \!\!\!\!\rightarrow M$$

on a

$$\{p_* P(\Omega)\} \ \in r(H^{2l}(M; \mathbb{Z})) \subset H^{2l}(M; \mathbb{R}),$$

où ω est une connexion sur X. Alors, P est de nature entière.

Démonstration. Soit (X, ω) un objet n-classifiant dans la catégorie des G-fibrés principaux sur des variétés avec connexion, où n est choisi assez grand par rapport à l pour que

$$H_i(X; \mathbb{Z}) = 0 \quad \forall i \leq 2l. \tag{4.6}$$

Soit F une fibre de X et soit M la base de X. L'homomorphisme de *transgression inverse*

$$\tau : H^{2l}(M; \mathbb{R}) \to H^{2l-1}(F; \mathbb{R})$$

est défini par

$$\tau\left(\{u\}\right) := \left\{ \left(\delta^{-1} p^*(u)\right)\big|_F \right\},$$

où $u \in \Delta^{2l}(M; \mathbb{R})$ est un $2l$-cocycle singulier tel que $u|_{\{m\}} = 0$ pour tout $m \in M$, tandis que $\delta^{-1}p^*(u)$ est un antécédent de $p^*(u)$ par le cobord $\delta : \Delta^{2l-1}(X; \mathbb{R}) \to \Delta^{2l}(X; \mathbb{R})$. La condition (4.6) assure que τ est ainsi bien définie. Nous notons que, via l'isomorphisme de de Rham,

$$\tau(\{p_* P(\Omega)\}) = \{TP\}.$$

La transgression inverse peut aussi être définie avec coefficients entiers et elle est naturelle par changement de coefficients, d'où l'intégralité de $\{TP\}$. □

Exemple 4.8. D'après les Théorèmes 3.8 et 3.10, les polynômes $C_1, \ldots, C_n \in I(\mathrm{U}(n))$ et $P_1, \ldots, P_{[n/2]} \in I(\mathrm{O}(n))$ sont donc tous de nature entière.

5. Applications à la géométrie riemannienne

On résume maintenant les applications géométriques que Chern et Simons ont trouvées pour leurs formes, et qui sont présentées dans les §4 et §5 de leur article [2].

Soit M une variété de dimension n. Nous allons considérer ces connexions sur le fibré des repères de M

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \rightarrowtail FM \xrightarrow{p} M$$

qui sont induites par les métriques riemanniennes de M.

5.1. **Rappels sur les connexions riemanniennes.** On pourra réviser les connexions riemanniennes dans [7, §III-§IV] par exemple. Nous nous contentons ici de quelques rappels « éclair ».

Définition 5.1. La *forme canonique* de FM est la 1-forme

$$\theta \in \Omega^1(FM;\mathbb{R}^n)$$

qui, à tout $v \in T_f FM$, associe le vecteur des coordonnées de $\mathrm{d}p(v) \in T_{p(f)}M$ dans le repère f de M.

On vérifie facilement que la forme θ est horizontale et $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$-équivariante.

Définition 5.2. Soit ω une connexion sur FM et soit $h : TM \to TM$ la projection horizontale qu'elle définit. La *forme de torsion* de ω est

$$\Theta := \mathrm{d}\theta \circ (h \otimes h) \in \Omega^2(FM;\mathbb{R}^n).$$

On vérifie que Θ est elle-même horizontale et $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$-équivariante. De plus, on a l'*équation de structure* pour la torsion :

$$\mathrm{d}\theta = \Theta - \omega \wedge \theta,$$

qui entraîne l'*identité de Bianchi* pour la torsion :

$$\mathrm{d}\Theta = \Omega \wedge \theta - \omega \wedge \Theta. \tag{5.1}$$

(Ici, chaque produit extérieur est un produit extérieur ordinaire suivi de l'action canonique $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.)

Définition 5.3. Soit g une métrique riemannienne sur M. Une connexion *métrique* de (M,g) est une connexion ω sur FM qui peut être réduite à une connexion sur $F_{\mathrm{O}}M$, le fibré des repères orthonormés de M.

Concrètement, une connexion ω sur FM est une connexion métrique de (M,g) si, et seulement si, g est préservée par transport parallèle. On rappelle maintenant le « Théorème fondamental de la géométrie riemannienne » :

Théorème 5.4. *Soit g une métrique riemannienne sur M. Il existe une unique connexion métrique de (M,g) qui est sans torsion.*

Cette connexion est appelée la *connexion riemannienne* de (M,g), ou *connexion de Levi-Civita*, et sera notée ici $\omega^{(g)}$.

5.2. **Invariance conforme.** Deux métriques riemanniennes g et h sur M sont *conformément équivalentes* s'il existe une fonction lisse $c : M \to]0, +\infty[$ telle que $h = c \cdot g$.

Théorème 5.5 (Chern–Simons)**.** *Soient g et h deux métriques conformémement équivalentes sur M. On a alors, pour tout $P \in I(\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}))$,*
- $TP(\omega^{(g)}) = TP(\omega^{(h)}) + exact \ \in \Omega^{2l-1}(FM)$,
- $P(\Omega^{(g)}) = P(\Omega^{(h)}) \ \in \Omega^{2l}(FM)$.

Corollaire 5.6. *Si g est une métrique riemannienne telle que $P(\Omega^{(g)}) = 0$, alors*

$$\left\{TP(\omega^{(g)})\right\} \ \in H^{2l-1}(FM;\mathbb{R})$$

est un invariant conforme de g.

A propos de la démonstration. Il suffit de montrer la première assertion du théorème. On remarque d'abord qu'il suffit de la prouver pour $P = Q_l$ où

$$Q_l(A \otimes \cdots \otimes A) := \mathrm{Tr}(A^l) \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$$

et, pour cela, on utilise le fait que les polynômes $Q_1, \cdots, Q_n$ engendrent $I(\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}))$. En outre, puisque le polynôme Q_{2l+1} s'annulent sur $\mathfrak{o}(n)$ et puisque $\omega^{(g)}$ se restreint à une connexion sur le sous-fibré $F_{\mathrm{O}}M$ des repères orthonormés de M, on montre que $Q_{2l+1}(\Omega^{(g)}) = 0$ et que $TQ_{2l+1}(\omega^{(g)})$ est exacte [2, Proposition 4.3] : l'énoncé est donc certainement vrai pour $P = Q_{2l+1}$. On se restreint dans la suite à $P = Q_{2l}$.

Supposons que $h = c \cdot g$. Alors,

$$g_t := \exp(t \ln(c)) \cdot g \quad \forall t \in [0, 1]$$

est un chemin de métriques reliant g à h, qui va induire un chemin de connexions ω_t entre $\omega^{(g)}$ et $\omega^{(h)}$. D'après la Proposition 4.3, il suffit de montrer que

$$Q_{2l}(\omega' \wedge \Omega^{(g)} \wedge \cdots \wedge \Omega^{(g)}) \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{où } \omega' := \left.\frac{\mathrm{d}\omega_t}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

... c'est un calcul qui utilise le fait que $\Omega^{(g)} \wedge \theta = 0$, comme il découle de l'identité de Bianchi (5.1). Voir [2, Theorem 4.5] pour ce calcul. □

5.3. **Immersion conforme dans les espaces euclidiens.** Pour tout fibré vectoriel réel ξ de dimension n sur une variété M, sa i-ème *classe de Pontrjagin inverse*

$$p_i^{\perp}(\xi) \in H^{4i}(M;\mathbb{Z})$$

est définie par la formule

$$(1 + p_1(\xi) + \cdots + p_{[n/2]}(\xi)) \cup (1 + p_1^{\perp}(\xi) + \cdots + p_i^{\perp}(\xi) + \cdots) = 1 \ \in H^*(M;\mathbb{Z}).$$

Si η est un autre fibré vectoriel réel tel que $\xi \oplus \eta$ est trivial, alors

$$p_i^{\perp}(\xi) = p_i(\eta),$$

comme il découle de la multiplicativité de la classe de Pontrjagin totale sous somme de Whitney. Pour tout $i \geq 1$, on définit un polynôme $P_i^{\perp} \in I^{2i}(\mathrm{O}(n))$ par l'égalité

$$(1 + P_1 + \cdots + P_{[n/2]}) \cdot (1 + P_1^{\perp} + \cdots + P_i^{\perp} + \cdots) = 1 \in I(\mathrm{O}(n)).$$

Equipons ξ d'une métrique euclidienne et soit ω une connexion sur le fibré des repères orthonormés de ξ

$$\mathrm{O}(n) \rightarrowtail F_{\mathrm{O}}(\xi) \overset{p}{\twoheadrightarrow} M.$$

Par le Théorème 3.10 et par la seconde assertion du Théorème 3.7, on aura

$$r(p_i^{\perp}(\xi)) = \{p_* P_i^{\perp}(\Omega)\} \in H^{4i}(M;\mathbb{R}). \tag{5.2}$$

Théorème 5.7 (Chern–Simons)**.** *Soit g une métrique riemannienne sur M. Une condition nécessaire pour que (M,g) puisse être conformément immergée dans $\mathbb{R}^{n+k}$, est que*
– $P_i^{\perp}(\Omega^{(g)}) = 0 \in \Omega^{4i}(FM)$
– $\left\{\frac{1}{2}TP_i^{\perp}(\omega^{(g)})\right\} \in r(H^{4i-1}(FM;\mathbb{Z})) \subset H^{4i-1}(FM;\mathbb{R})$
pour tout $i > [k/2]$.

A propos de la démonstration. C'est le résultat le plus fin du papier de Chern et Simons : consulter [2, Theorem 5.14] pour la preuve. Remarquons simplement que, si M s'immerge topologiquement dans $\mathbb{R}^{n+k}$, on aura $p_i^{\perp}(TM) = 0$ pour tout $i > [k/2]$ puisque le fibré vectoriel TM admet alors un inverse de dimension k. D'après (5.2), ce fait est cohérent avec la première assertion du théorème. □

6. Invariants de Chern–Simons

Sous certaines hypothèses, on peut construire à partir de la forme de Chern–Simons un invariant numérique des connexions à valeurs dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

6.1. **Rappels sur l'espace des connexions.** Soit M une variété.

Définition 6.1. Soient X et X' des G-fibrés principaux de base M. Deux connexions $\omega \in \Omega^1(X;\mathfrak{g})$ et $\omega' \in \Omega^1(X';\mathfrak{g})$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de G-fibrés principaux $\psi : X \to X'$ (au dessus de l'identité de M) tel que $\psi^*(\omega') = \omega$.

Soit $\mathcal{C}(M)$ l'ensemble des connexions sur un G-fibré principal de base M, à isomorphisme près. Les parties de $\mathcal{C}(M)$ correspondant aux connexions sur un fibré trivial et correspondant aux connexions plates sont notées

$$\mathcal{T}(M) \subset \mathcal{C}(M) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(M) \subset \mathcal{C}(M),$$

respectivement. L'ensemble $\mathcal{F}(M)$ admet une description algébrique qu'on rappelle maintenant. L'*holonomie* d'une connexion plate ω sur un G-fibré principal X de base M, est l'homomorphisme de groupes

$$\chi_\omega : \pi_1(M) \longrightarrow G$$

défini, à une conjugaison dans G près, de la manière suivante [7, §II]. Ayant choisi au préalable $m \in M$ et $x \in X$ dans la fibre au-dessus de m, on pose

$$\chi_\omega(\{\gamma\}) := \widetilde{\gamma}(1)/\widetilde{\gamma}(0)$$

où $\gamma : [0,1] \to M$ est un lacet basé en m, $\widetilde{\gamma}$ est l'unique relevé horizontal de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x$, et $\widetilde{\gamma}(1)/\widetilde{\gamma}(0)$ est l'unique élément g de G tel que $\widetilde{\gamma}(1) = R_g(\widetilde{\gamma}(0))$.

Théorème 6.2. *Associer à une connexion plate son holonomie définit une bijection*

$$\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Hom}(\pi_1(M), G)/G.$$

Voir, par exemple, [9, Theorem 6.60] pour une preuve.

6.2. **La fonctionnelle de Chern–Simons.** Soit maintenant M une variété orientée de dimension $2l-1$, et soit $P \in I^l(G)$ de nature entière. On suppose aussi que

$$\forall i,j > 0,\ i+j = 2l-1 \Rightarrow (H_i(G;\mathbb{R}) = 0 \text{ ou } H_j(M;\mathbb{R}) = 0)\,. \tag{6.1}$$

Proposition 6.3. *Pour toute connexion ω sur un G-fibré principal trivial X de base M, la quantité*

$$\mathrm{CS}(\omega) := \int_M s^*TP(\omega) \mod 1$$

ne dépend pas du choix d'une section $s : M \to X$.

On définit ainsi une fonction $\mathrm{CS} : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Démonstration de la Proposition 6.3. D'après la Proposition 4.4, la forme $TP(\omega)$ est fermée, ce qui nous autorise à écrire

$$\int_M s^*TP(\omega) = \big\langle \{TP(\omega)\}, s_*([M]) \big\rangle \in \mathbb{R}.$$

D'après la formule de Künneth, la condition (6.1) revient à dire que la suite

$$0 \to H_{2l-1}(F;\mathbb{R}) \xrightarrow{i_*} H_{2l-1}(X;\mathbb{R}) \xrightarrow{p_*} H_{2l-1}(M;\mathbb{R}) \to 0$$

est exacte, où $i : F \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'une fibre de X et où p est la projection. Si $s' : M \to X$ est une autre section, on a alors

$$s_*([M]) - s'_*([M]) \in i_*H_{2l-1}(F;\mathbb{R}).$$

Du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
H_{2l-1}(F;\mathbb{Z}) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i_*"] & H_{2l-1}(F;\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"] & H_{2l-1}(F;\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "i_*"] \\
H_{2l-1}(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "r"] & H_{2l-1}(X;\mathbb{R}) \arrow[r] & H_{2l-1}(X;\mathbb{R}/\mathbb{Z}),
\end{tikzcd}$$

aux lignes et aux colonnes exactes, on déduit qu'il existe $\beta \in H_{2l-1}(F;\mathbb{Z})$ tel que $i_*r(\beta) = s_*([M]) - s'_*([M])$. D'après le Lemme 4.6, nous avons donc

$$\big\langle \{TP(\omega)\}, s_*([M]) - s'_*([M]) \big\rangle \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

Dans la suite, nous considérons une variété orientée M de dimension $3 = 2l - 1$, et une forme quadratique G-invariante $P \in I^2(G)$. La formule (4.2) donne, pour toute connexion ω,

$$TP(\omega) = P(\omega \wedge \Omega) - \frac{1}{6}P(\omega \wedge [\omega,\omega]) \overset{(3.1)}{=} P(\omega \wedge \mathrm{d}\omega) + \frac{1}{3}P(\omega \wedge [\omega,\omega]). \tag{6.2}$$

6.3. **Le cas** $\mathrm{SU}(2)$ **en dimension** 3. Considérons $G = \mathrm{SU}(2)$ et $P = C_2 \in I^2(\mathrm{SU}(2))$. Un calcul simple donne

$$C_2(A \otimes A) = \frac{\mathrm{Tr}(A^2) - \mathrm{Tr}(A)^2}{8\pi^2} \quad \forall A \in \mathfrak{u}(2)$$

et donc

$$C_2(A \otimes A) = \frac{\mathrm{Tr}(A^2)}{8\pi^2} \quad \forall A \in \mathfrak{su}(2).$$

La formule (6.2) donne, en utilisant la convention (3.3),

$$TC_2(\omega) = \frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{Tr}\left(\omega \wedge \mathrm{d}\omega + \frac{1}{3}\omega \wedge [\omega,\omega]\right)$$

Enfin, puisque $[\omega,\omega] = 2 \cdot \omega \wedge \omega$ avec nos conventions et notations, on obtient

$$TC_2(\omega) = \frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{Tr}\left(\omega \wedge \mathrm{d}\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega\right). \tag{6.3}$$

La condition homologique (6.1) est certainement satisfaite puisque $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$. Ainsi, l'invariant de Chern–Simons est bien défini par la formule

$$\mathrm{CS}(\omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M s^* \operatorname{Tr}\left(\omega \wedge \mathrm{d}\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega\right) \mod 1. \tag{6.4}$$

Remarque 6.4. C'est l'invariant de Chern–Simons évoqué dans l'introduction (1.1), et qu'on trouve souvent dans la littérature, par exemple dans [6].

Puisque $\pi_1(\mathrm{SU}(2))$ et $\pi_2(\mathrm{SU}(2))$ sont triviaux, tout $\mathrm{SU}(2)$-fibré principal de base M admet une section. Aussi, avons-nous $\mathcal{C}(M) = \mathcal{T}(M)$ dans ce cas particulier.

Proposition 6.5. *Les « points critiques » de la fonction*

$$\mathrm{CS} : \mathcal{C}(M) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

sont les connexions plates $\mathcal{F}(M)$.

Démonstration. Ceci découle de la Proposition 4.3 et de la non-dégénérescence de la forme quadratique C_2. □

6.4. **Le cas** $\mathrm{SO}(3)$ **en dimension** 3. Considérons $G = \mathrm{SO}(3)$ et $P = P_1 \in I^2(\mathrm{SO}(3))$. Un calcul simple donne

$$P_1(A \otimes A) = -\frac{\operatorname{Tr}(A^2)}{8\pi^2} \quad \forall A \in \mathfrak{so}(3).$$

La condition homologique (6.1) est satisfaite puisque $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3$. Ainsi, l'invariant de Chern–Simons est bien défini par la formule

$$\mathrm{CS}(\omega) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M s^* \operatorname{Tr}\left(\omega \wedge \mathrm{d}\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega\right) \mod 1. \tag{6.5}$$

Remarque 6.6. On trouve cette autre version de l'invariant de Chern–Simons dans d'autres papiers, par exemple dans [3].

Quel est le rapport avec l'invariant de Chern–Simons $\mathrm{SU}(2)$ introduit en §6.3 ? Le groupe de Lie $\mathrm{SU}(2)$ est le revêtement double de $\mathrm{SO}(3)$, i.e. $\mathrm{SU}(2) = \mathrm{Spin}(3)$:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrowtail \mathrm{SU}(2) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{SO}(3).$$

Lemme 6.7. *Soit ω une connexion sur un $\mathrm{SU}(2)$-fibré principal (trivial) de base M, et soit $\pi_*\omega$ la connexion sur le $\mathrm{SO}(3)$-fibré principal induite par π. On a alors*

$$\mathrm{CS}(\pi_*\omega) = -4\,\mathrm{CS}(\omega) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. La projection π se décrit agréablement à l'aide des quaternions. Identifions S^3 avec les quaternions unitaires :

$$S^3 = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\},$$

et $\mathbb{R}^3$ avec les quaternions purs :

$$\mathbb{R}^3 = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} : a = 0\}.$$

Rappelons que

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{array} \right) \middle| \, x = a + ib \in \mathbb{C}, y = c + id \in \mathbb{C} : |x|^2 + |y|^2 = 1 \right\}$$

s'identifie à S^3 par

$$\left(\begin{array}{cc} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{array} \right) \longmapsto x + yj = a + bi + cj + dk.$$

Alors, pour tout $q \in S^3$, $\pi(q) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est la conjugaison $h \mapsto qhq^{-1}$. En coordonnées, nous trouvons

$$\pi \begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2bd+2ac \\ 2bc+2ad & a^2+c^2-b^2-d^2 & 2dc-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & a^2+d^2-c^2-b^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3).$$

On peut alors calculer la différentielle en 1

$$\mathrm{d}\pi : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3),$$

où

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ir & y \\ -\overline{y} & -ir \end{pmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{C} \right\}$$

et

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

On trouve la formule

$$\mathrm{d}\pi \begin{pmatrix} ir & y \\ -\overline{y} & -ir \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\,\mathrm{Im}(y) & 2\,\mathrm{Re}(y) \\ 2\,\mathrm{Im}(y) & 0 & -2r \\ -2\,\mathrm{Re}(y) & 2r & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple montre alors que la forme $P_1 \circ (\mathrm{d}\pi \otimes \mathrm{d}\pi) : \mathfrak{su}(2) \otimes \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}$ vaut $-4C_2$. La conclusion découle alors de (6.2). $\square$

6.5. **Un invariant des variétés riemanniennes de dimension 3.** Chern et Simons consacrent la dernière section de leur papier [2] à un invariant des variétés riemanniennes (M, g) orientées de dimension 3 :

$$\Phi(M, g) := \frac{1}{2} \int_M s^* T P_1(\omega^{(g)}) \mod 1.$$

Ici, $\omega^{(g)}$ est la connexion riemannienne sur $F_{\mathrm{SO}}M$, le fibré des repères orthonormés directs de M, et $s : M \to F_{\mathrm{SO}}M$ est une section. Cet invariant est bien défini d'après la Proposition 6.3 et parce que $P_1/2 \in I^2(\mathrm{O}(3))$ est de nature entière [2, (5.13)].

Remarque 6.8. On a bien sûr $2\Phi(M, g) = \mathrm{CS}(\omega^{(g)})$, où CS est l'invariant des connexions donné par la formule (6.5).

Théorème 6.9. $\Phi(M, g)$ *est un invariant conforme de* (M, g) *et, une condition nécessaire pour que* (M, g) *admette une immersion conforme dans* $\mathbb{R}^4$ *est que* $\Phi(M, g) = 0$.

Démonstration. La première assertion découle du Théorème 5.5. La seconde assertion est une conséquence du Théorème 5.7 puisque $P_1^{\perp} = -P_1$. On pourra aussi consulter [1] pour une démonstration directe en dimension 3. $\square$

Voir [2, §6] pour plus de détails sur cet invariant géométrique Φ ...

Références

[1] S.-S. Chern, *On a conformal invariant of three-dimensional manifolds*. Aspects of mathematics and its applications, 245–252, North-Holland Math. Library, 34, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[2] S.-S. Chern, J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. Math. 99 (1974) 48–69.

[3] R. Fintushel, R. Stern, *Instanton homology of Seifert fibered homology spheres*, Proc. London Math. Soc. 61 (1990) 109–137.

[4] A. Floer, *An instanton-invariant for* 3*-manifolds*, Comm. Math. Phys. 118 (1988) 215–240.

[5] D. Husemoller, *Fibre bundles.* Graduate Texts in Mathematics, 20. Springer-Verlag, New York, 1994.

[6] P. Kirk, E. Klassen, *Chern–Simons invariants of* 3*-manifolds and representation spaces of knot groups*, Math. Ann. 287 (1990) 343–367.

[7] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry, Volumes I & II.* Interscience Publishers, New-York & London, 1963.

[8] J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic classes.* Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

[9] S. Morita, *Geometry of differential forms.* Translations of Mathematical Monographs, 201. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[10] M. Narasimhan, S. Ramanan, *Existence of universal connections,* Amer. J. Math. 83 (1961) 563–572.

[11] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles.* Princeton University Press, Princeton, 1951.

[12] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. 121 (1989) 351–399.