COMMENTAIRE : $\Omega_3 = 0$ CHEZ RENÉ THOM

GWÉNAËL MASSUYEAU

La trivialité du groupe de cobordisme orienté Ω_3 – c'est-à-dire le fait que toute variété de dimension trois, fermée et orientée, borde – fut démontrée par Vladimir A. Rokhlin [2] et, indépendamment, par René Thom qui en produisit trois démonstrations différentes.

La démonstration de R. Thom qui est généralement citée dans la littérature, se trouve au Chapitre IV de l'article [5]. En effet, une fois acquis l'isomorphisme entre Ω_k et le groupe d'homotopie stable $\pi_{n+k}\big(M(SO(n))\big)$ de l'espace de Thom du fibré vectoriel orienté universel, les résultats partiels obtenus à la section 8 du Chapitre II sur le type d'homotopie « stable » de cet espace permettent d'en déduire les valeurs de Ω_k pour $k \leq 7$. En fait, seule une partie des calculs menés dans cette section (à base d'opérations de Steenrod sur des espaces d'Eilenberg–Mac Lane) est nécessaire pour conclure que $\Omega_3 = 0$, mais la preuve ainsi constituée n'en demeure pas moins complexe et très indirecte.

Une démonstration plus directe se trouve dans la note [4]. R. Thom y considère l'homomorphisme de groupes $\psi_k : \pi_{n+k}(S^n) \to \Omega_k$ consistant à associer à toute application $f : S^{n+k} \to S^n$ l'image inverse régulière d'une approximation lisse de f . L'image de cet homomorphisme est formée des classes de cobordismes des variétés de dimension k qui peuvent être plongées dans $\mathbb{R}^{n+k}$ avec fibré normal trivial. Toutes les variétés fermées orientées de dimension trois sont parallélisables et possèdent donc cette propriété (pour n assez grand) : aussi ψ_3 est-il surjectif. R. Thom mentionne ensuite que le groupe d'homotopie stable $\pi_{n+3}(S^n)$ est cyclique engendré par la suspension de la fibration de Hopf quaternionique : la fibre de celle-ci, S^3, étant évidemment un bord, il conclut que ψ_3 est trivial.

Ces deux démonstrations ont en commun d'être basées sur une construction du type « Thom–Pontrjagin » et de nécessiter certaines méthodes de la topologie algébrique pour la détermination d'un groupe d'homotopie stable. La preuve contenue dans la note [3] – la première en date – utilise au contraire des techniques propres à la topologie de petite dimension. R. Thom débute en prévenant qu'il ne pourra « guère qu'indiquer [...] le principe de la démonstration », mais le lecteur parviendra aisément à la dérouler comme suit. Toute variété fermée orientée de dimension trois admet un *scindement de Heegaard*, i.e. qu'elle se présente sous la forme

$$V_\varphi := H_g \cup_\varphi (-H_g)$$

où H_g désigne un corps en anses de genre g et $\varphi : \partial H_g \to \partial H_g$ est un difféomorphisme préservant l'orientation. Bien sûr, comme seul le type de difféomorphisme de V_φ nous intéresse ici, il suffit de considérer φ à isotopie près, i.e. comme élément du groupe de difféotopie $\mathcal{M}(\partial H_g)$ de la surface orientée ∂H_g. R. Thom observe que l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{M}(\partial H_g)$ tels que $[V_\varphi] = 0 \in \Omega_3$ constitue un sous-groupe de $\mathcal{M}(\partial H_g)$: en effet, si Q et Q' sont des variétés compactes orientées de dimension quatre qui sont bordées par V_φ et $V_{\varphi'}$, respectivement, où $\varphi, \varphi' \in \mathcal{M}(\partial H_g)$, alors $V_{\varphi\circ\varphi'}$ borde la variété orientée obtenue en collant Q et Q' le long des corps en anses H_g et $(-H_g)$ de V_φ et $V_{\varphi'}$, respectivement. Par ailleurs, M. Dehn a décrit dans [1] un système de générateurs explicite $\mathcal{S}_g$ pour le groupe $\mathcal{M}(\partial H_g)$, qui se compose d'un nombre fini de « twists » le long de courbes simples et fermées : il suffit donc de démontrer que, pour chaque $g \geq 1$, on a $[V_\tau] = 0 \in \Omega_3$ pour tout $\tau \in \mathcal{S}_g$. Or, si $g > 1$, il apparaît dans [1] que la courbe définissant n'importe lequel de ces $\tau \in \mathcal{S}_g$ a la propriété d'éviter une anse solide de H_g, si bien que V_τ est la somme connexe de $S^1 \times S^2$ avec une variété W admettant un scindement de Heegaard de genre $g - 1$: il s'en suit que V_τ est cobordante à W (via la variété obtenue de $W \times [0, 1]$ par attachement d'une anse d'indice un). Cela nous autorise à démontrer la chose par récurrence sur le genre $g \geq 1$. La récurrence s'amorce ainsi : pour $g = 1$, deux twists τ, τ' (définis par un « méridien » et un « parallèle » du tore solide H_1) suffisent pour engendrer le groupe de difféotopie $\mathcal{M}(\partial H_1)$; les variétés V_τ et $V_{\tau'}$ qui en résultent sont donc S^3 et $S^1 \times S^2$ et, bien sûr, elles bordent.

Références

[1] Dehn, R. *Die Gruppe der Abbildungsklassen. (Das arithmetische Feld auf Flächen.)* Acta Math. 69 (1938), no. 1, 135–206.

[2] Rokhlin, V. A. *A three-dimensional manifold is the boundary of a four-dimensional one.* Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 81 (1951), 355–357.

[3] Thom, R. *Quelques propriétés des variétés-bords.* Colloque de Topologie de Strasbourg, 1951, no. V, 10 pp. La Bibliothèque Nationale et Universitaire de Strasbourg, 1952.

[4] Thom, R. *Sur les variétés cobordantes.* Colloque de topologie et géométrie différentielle, Strasbourg, 1952, no. 7, 4 pp. La Bibliothèque Nationale et Universitaire de Strasbourg, 1953.

[5] Thom, R. *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.* Comment. Math. Helv. 28 (1954), 17–86.