

# UNE COURTE INTRODUCTION AUX INVARIANTS DE DIJKGRAAF–WITTEN

GWÉNAËL MASSUYEAU

RÉSUMÉ. Cette note, informelle et imprécise, accompagne un exposé donné durant la « Journée Géométrie, Topologie et Physique » à Strasbourg, le 28 Février 2008. Nous introduisons les invariants de Dijkgraaf–Witten et nous donnons leur formule par somme d'états.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Quelques rappels de cohomologie des groupes	2
3. Invariants de DW en petite dimension	5
4. Formule par somme d'états pour les invariants de DW	7
5. Quelques propriétés des invariants de DW	10
6. Des invariants quantiques de Witten aux invariants de DW	11
7. Pour aller plus loin ...	14
Références	15

## 1. INTRODUCTION

Soit  $G$  un groupe fini et soit  $K(G, 1)$  un espace d'Eilenberg–MacLane. Ainsi,  $K(G, 1)$  est l'espace topologique pointé (unique à équivalence d'homotopie près) satisfaisant

$$\pi_1(K(G, 1), \bullet) = G \quad \text{et} \quad \pi_i(K(G, 1), \bullet) = 0 \quad \text{pour } i > 1.$$

On choisit aussi

$$\alpha \in H^d(G; U(1)) = H^d(K(G, 1); U(1)).$$

*Définition 1.1.* Soit  $M$  une  $d$ -variété fermée, orientée et connexe. L'invariant de Dijkgraaf–Witten de  $M$ , relatif à la classe de cohomologie  $\alpha$ , est

$$Z_\alpha(M) := |G|^{-1} \sum_{\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(M, \bullet), G)} \langle \alpha, (f_\gamma)_*([M]) \rangle \in \mathbb{C}.$$

Ici,  $\bullet \in M$  est un point base et  $f_\gamma : M \rightarrow K(G, 1)$  est l'application pointée (unique à homotopie près) telle que  $(f_\gamma)_* = \gamma$  au niveau du  $\pi_1(-)$  : ces choix ne comptent pas.

Malgré leur définition très simple, les invariants de Dijkgraaf–Witten n'ont été formulés que récemment. Ils semblent être apparus pour la première fois en 1990 dans l'article [7], pour servir de « toy examples » aux invariants quantiques de Witten [20].

## 2. QUELQUES RAPPELS DE COHOMOLOGIE DES GROUPES

Nous commençons par quelques rappels en cohomologie des groupes et nous renvoyons, pour de plus amples détails, à [3] ou à [10, §VI]. Dans la suite,  $G$  est un groupe et  $\mathbb{Z}[G]$  désigne son algèbre de groupe.

**2.1. Définitions.** Le  $n$ -ième groupe d'homologie de  $G$  à coefficients dans  $R$ , un  $\mathbb{Z}[G]$ -module à droite, est

$$H_n(G; R) := \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(R, \mathbb{Z})$$

où  $\mathbb{Z}$  est vu comme  $\mathbb{Z}[G]$ -module trivial à gauche. Ainsi, si  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$  est une résolution projective du  $\mathbb{Z}[G]$ -module  $\mathbb{Z}$ , on a

$$(2.1) \quad H_n(G; R) = H_n(R \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbf{P}).$$

Dualement, le  $n$ -ième groupe de cohomologie de  $G$  à coefficients dans  $L$ , un  $\mathbb{Z}[G]$ -module à gauche, est

$$H^n(G; L) := \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}, L).$$

Ainsi, si  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$  est une résolution projective du  $\mathbb{Z}[G]$ -module  $\mathbb{Z}$ , on a

$$(2.2) \quad H^n(G; L) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbf{P}, L)).$$

**2.2. Recours au  $K(G, 1)$ .** Le calcul de l'homologie de  $G$  nécessite donc de trouver une résolution projective de  $\mathbb{Z}$  comme  $\mathbb{Z}[G]$ -module trivial à gauche. Cela peut se construire topologiquement, grâce au lemme suivant.

**Lemme 2.1.** *Soit  $K(G, 1)$  un espace d'Eilenberg–MacLane, avec une décomposition en cellules orientées. Alors, le complexe des chaînes cellulaires de son revêtement universel est une résolution libre de  $\mathbb{Z}$  comme  $\mathbb{Z}[G]$ -module trivial à gauche.*

*Démonstration.* Soit  $p : \tilde{K}(G, 1) \rightarrow K(G, 1)$  le revêtement universel :  $\tilde{K}(G, 1)$  est connexe par arcs et simplement connexe. De plus, puisque  $p$  est une fibration de fibre discrète, on a  $\pi_i(\tilde{K}(G, 1), \cdot) \simeq \pi_i(K(G, 1), \cdot) = 0$  pour tout  $i \geq 2$ . Donc,  $\tilde{K}(G, 1)$  est contractile si bien que

$$H_i(\tilde{K}(G, 1); \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{pour } i > 0.$$

Donc, le complexe cellulaire réduit de  $\tilde{K}(G, 1)$  est acyclique. Par ailleurs,

$$G = \pi_1(K(G, 1), \cdot) \simeq \mathrm{Aut}(\tilde{K}(G, 1), p)$$

agit à gauche sur  $\tilde{K}(G, 1)$  et, donc, sur son complexe cellulaire. Ainsi, l'augmentation

$$C(\tilde{K}(G, 1)) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

fournit une résolution de  $\mathbb{Z}$  comme  $\mathbb{Z}[G]$ -module trivial à gauche. □

D'après (2.1) et (2.2), on a donc

$$H_n(G; R) = H_n(K(G, 1); \mathcal{R}) \quad \text{et} \quad H^n(G; L) = H^n(K(G, 1); \mathcal{L})$$

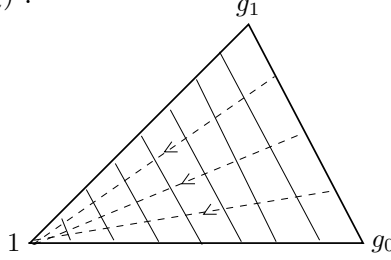
où  $\mathcal{R} \rightarrow K(G, 1)$  est le fibré de coefficients défini par l'anti-homomorphisme de groupes  $\pi_1(K(G, 1), \cdot) \rightarrow \mathrm{Aut}(R)$  donnant l'action de  $G$  sur  $R$ . (Idem pour  $\mathcal{L}$  vis-à-vis de  $L$ .)

**2.3. Modèle simplicial.** Nous sommes donc ramenés au problème de la construction d'un  $K(G, 1)$ . Il existe une construction systématique de  $K(G, 1)$  : c'est le modèle simplicial de Milnor.

A tout  $\sigma = (g_0, \dots, g_n) \in G^{n+1}$ , on associe une copie  $\Delta^\sigma$  du simplexe standard de dimension  $n$  de sommets  $(v_0^\sigma, \dots, v_n^\sigma)$ . Soit  $d_i\sigma = (g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n) \in G^n$  et soit  $\delta_i^\sigma : \Delta^{d_i\sigma} \rightarrow \Delta^\sigma$  le plongement linéaire envoyant les points  $v_0^{d_i\sigma}, \dots, v_{n-1}^{d_i\sigma}$  sur  $v_0^\sigma, \dots, \widehat{v}_i^\sigma, \dots, v_n^\sigma$  respectivement. On pose

$$(2.3) \quad \widetilde{K}^\Delta(G, 1) := \bigsqcup_{n \geq 0, \sigma \in G^{n+1}} \Delta^\sigma / \sim$$

où  $\sim$  identifie chaque  $\Delta^{d_i\sigma}$  avec la  $i$ -ième face de  $\Delta^\sigma$  via  $\delta_i^\sigma$ . On vérifie que  $\widetilde{K}^\Delta(G, 1)$  est contractile grâce à la rétraction linéaire par morceaux qui envoie chaque  $n$ -simplex  $\Delta^\sigma$ , associé à  $\sigma = (g_0, \dots, g_n)$ , sur le 0-simplex  $\Delta^{(1)}$  à l'intérieur du  $(n+1)$ -simplex  $\Delta^{h\sigma}$ , associé à  $h\sigma := (1, g_0, \dots, g_n)$  :



De plus,  $G$  agit à gauche sur  $\widetilde{K}^\Delta(G, 1)$  : pour tout  $g \in G$  et pour tout  $\sigma = (g_0, \dots, g_n) \in G^{n+1}$ , le simplexe  $\Delta^\sigma$  est appliqué linéairement sur  $\Delta^{g \cdot \sigma}$  où  $g \cdot \sigma := (gg_0, \dots, gg_n)$ , les points  $v_0^\sigma, \dots, v_n^\sigma$  allant sur  $v_0^{g \cdot \sigma}, \dots, v_n^{g \cdot \sigma}$  respectivement. Puisque cette action est libre,

$$K^\Delta(G, 1) := \widetilde{K}^\Delta(G, 1) / G$$

est un  $K(G, 1)$  et  $\widetilde{K}^\Delta(G, 1)$  est son revêtement universel.

La triangulation évidente de  $\widetilde{K}^\Delta(G, 1)$  définit une décomposition en cellules orientées. D'après le Lemme 2.1, le complexe des chaînes cellulaires de  $\widetilde{K}^\Delta(G, 1)$  fournit donc une résolution libre de  $\mathbb{Z}$  comme  $\mathbb{Z}[G]$ -module trivial à gauche. C'est le *complexe standard homogène* de  $G$

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} H_2(G) \xrightarrow{\partial_2} H_1(G) \xrightarrow{\partial_1} H_0(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

avec pour chaînes  $H_n(G) := \mathbb{Z} \cdot G^{n+1}$  et avec pour opérateur de bord

$$(2.4) \quad \partial_n(g_0, \dots, g_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot (g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n).$$

On préfère décrire ce complexe d'une autre façon. Le *complexe standard inhomogène* de  $G$  est le complexe de  $\mathbb{Z}[G]$ -modules

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} I_2(G) \xrightarrow{\partial_2} I_1(G) \xrightarrow{\partial_1} I_0(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

avec pour chaînes  $I_n(G) := \mathbb{Z}[G] \cdot G^n$  et avec pour opérateur de bord

$$(2.5) \quad \partial_n[h_1 | \dots | h_n] = h_1 \cdot [h_2 | \dots | h_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \cdot [h_1 | \dots | h_i h_{i+1} | \dots | h_n] + (-1)^n \cdot [h_1 | \dots | h_{n-1}].$$

En effet, les complexes  $\mathbb{I}(G)$  et  $\mathbb{H}(G)$  sont isomorphes par l'application

$$[h_1 | \cdots | h_n] \longmapsto (1, h_1, h_1 h_2, \dots, h_1 h_2 \cdots h_n).$$

La méthode précédente s'améliore en faisant plus d'identifications entre les simplexes pour définir  $\widetilde{\mathbb{K}}^\Delta(G, 1)$  en (2.3). Pour tout  $\sigma = (g_0, \dots, g_n) \in G^{n+1}$ , nous notons  $s_i \sigma := (g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, g_n) \in G^{n+2}$  et nous demandons que la relation  $\sim$  écrase le  $(n+1)$ -simplexe  $\Delta^{s_i \sigma}$  sur le  $n$ -simplexe  $\Delta^\sigma$ , via l'application linéaire envoyant  $v_0^{s_i \sigma}, \dots, v_{n+1}^{s_i \sigma}$  sur  $v_0^\sigma, \dots, v_i^\sigma, v_i^\sigma, \dots, v_n^\sigma$  respectivement. L'espace  $\widetilde{\mathbb{K}}^\Delta(G, 1)$  obtenu reste contractile et on obtient ainsi le complexe standard homogène *normalisé* de  $G$ , noté  $\mathcal{H}(G)$ , avec pour chaînes

$$\mathcal{H}_n(G) := \mathbb{Z} \cdot \{(g_0, \dots, g_n) \in G^{n+1} : g_i \neq g_{i+1}\}$$

et l'opérateur de bord (2.4). Ce complexe est isomorphe au complexe standard inhomogène *normalisé* de  $G$ , noté  $\mathcal{I}(G)$ , avec pour chaînes

$$\mathcal{I}_n(G) := \mathbb{Z}[G] \cdot \{[h_1 | \cdots | h_n] \in G^n : h_i \neq 1\}$$

et l'opérateur de bord (2.5).

**2.4. Exemples.** Dans la suite, nous n'aurons besoin que de l'homologie de  $G$  à coefficients (non-tordus) dans  $\mathbb{Z}$ . D'après §2.3,  $H_*(G; \mathbb{Z})$  est l'homologie du complexe

$$(2.6) \quad \mathbb{B}(G) := \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathcal{I}(G)$$

ayant pour chaînes

$$\mathbb{B}_n(G) = \mathbb{Z} \cdot \{[h_1 | \cdots | h_n] \in G^n : h_i \neq 1\}$$

et pour opérateur de bord

$$\partial_n [h_1 | \cdots | h_n] = [h_2 | \cdots | h_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \cdot [h_1 | \cdots | h_i h_{i+1} | \cdots | h_n] + (-1)^n \cdot [h_1 | \cdots | h_{n-1}].$$

$\mathbb{B}(G)$  est le complexe des chaînes cellulaires de  $\mathbb{K}^\Delta(G, 1)$  pour la triangulation singulière qu'il hérite de la triangulation de  $\widetilde{\mathbb{K}}^\Delta(G, 1)$ . On l'appelle *complexe bar* du groupe  $G$ .

Nous aurons aussi besoin de la cohomologie de  $G$  à coefficients (non-tordus) dans le groupe abélien  $U(1)$ , lequel sera noté multiplicativement. D'après §2.3,  $H^*(G; U(1))$  est la cohomologie du complexe de cochaînes

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{B}(G), U(1)),$$

qui est le complexe des cochaînes cellulaires de  $\mathbb{K}^\Delta(G, 1)$  à valeurs dans  $U(1)$ . Notons qu'un  $d$ -cocycle pour ce complexe est une fonction  $a : G^d \rightarrow U(1)$  vérifiant

$$a(h_1 | \cdots | h_d)^{(-1)^{d+1}} \cdot a(h_2 | \cdots | h_{d+1}) \cdot \prod_{i=1}^d a(h_1 | \cdots | h_i h_{i+1} | \cdots | h_{d+1})^{(-1)^i} = 1$$

ainsi que

$$a(1|h_2|\cdots|h_d) = a(h_1|1|h_3|\cdots|h_d) = \cdots = a(h_1|\cdots|h_{d-1}|1) = 1.$$

### 3. INVARIANTS DE DW EN PETITE DIMENSION

Soit  $\alpha \in H^d(G; \mathbb{U}(1))$  où  $G$  est un groupe fini. Dans cette section, nous examinons l'invariant de Dijkgraaf–Witten  $Z_\alpha$  en petite dimension  $d$  : il existe des formules « intrinsèques » pour  $d = 1$  et  $d = 2 \dots$  mais la situation est plus complexe pour  $d = 3$ !

**3.1. Formule en dimension  $d = 1$ .** La donnée de  $\alpha \in H^1(G; \mathbb{U}(1))$  est équivalente à celle d'un 1-cocycle normalisé  $a : G \rightarrow \mathbb{U}(1)$ , i.e. un homomorphisme de groupes. On a

$$Z_\alpha(S^1) = |G|^{-1} \sum_{\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(S^1, \cdot), G)} \langle \alpha, (f_\gamma)_*([S^1]) \rangle = |G|^{-1} \sum_{g \in G} a(g).$$

Nous concluons que

$$Z_\alpha(S^1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

**3.2. Formule en dimension  $d = 2$ .** Représentons  $\alpha \in H^2(G; \mathbb{U}(1))$  par un 2-cocycle normalisé  $a : G \times G \rightarrow \mathbb{U}(1)$ . Ainsi, nous avons

$$a(h|k) \cdot a(gh|k)^{-1} \cdot a(g|hk) \cdot a(g|h)^{-1} = 1, \quad a(g|1) = 1 \quad \text{et} \quad a(1|h) = 1.$$

Une  $a$ -représentation de  $G$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie, muni d'une application  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$  tel que  $\rho(g_1 g_2) = a(g_1|g_2) \cdot \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$ . Soit  $\text{R}(G; a)$  l'ensemble des  $a$ -représentations irréductibles de  $G$ , à isomorphisme près.

**Fait 3.1.**  $|\text{R}(G; a)|$  est égal au nombre de classes de conjugaison d'éléments  $a$ -réguliers de  $G$ , un élément  $g$  de  $G$  étant dit  $a$ -régulier si  $(\forall h \in G, [g, h] = 1 \Rightarrow a(g|h) = a(h|g))$ .

**Fait 3.2.**  $\text{R}(G; a)$  ne dépend essentiellement que de  $\alpha = \{a\}$ . Plus précisément, si  $a' = a \cdot (b \circ \partial_2)$  (où  $b : G \rightarrow \mathbb{U}(1)$  est telle que  $b(1) = 1$ ), alors  $\text{R}(G; a)$  est en bijection canonique avec  $\text{R}(G; a')$  par  $\{(V, \rho)\} \mapsto \{(V, b \cdot \rho)\}$ .

**Fait 3.3.** Pour tout  $\{(V, \rho)\} \in \text{R}(G; a)$ ,  $\dim(V)$  divise  $|G|$ .

Tous ces faits sont bien connus lorsque  $\alpha$  est trivial (théorie des représentations des groupes finis) : voir [11] pour le cas général.

**Théorème 3.4** (Turaev [18]). *Pour toute surface  $\Sigma$  fermée connexe et orientée, on a*

$$Z_\alpha(\Sigma) = \sum_{\{(V, \rho)\} \in \text{R}(G; a)} \left( \frac{|G|}{\dim(V)} \right)^{-\chi(\Sigma)}.$$

En particulier, pour  $\alpha = 1$ , on retrouve la formule de Frobenius–Mednykh [14] :

$$|\text{Hom}(\pi_1(\Sigma, \cdot), G)| = |G| \sum_{\{(V, \rho)\} \in \text{R}(G)} \left( \frac{|G|}{\dim(V)} \right)^{-\chi(\Sigma)}$$

où  $\text{R}(G)$  désigne l'ensemble des représentations irréductibles de  $G$ , à isomorphisme près.

*Preuve du Théorème 3.4 pour  $\Sigma = S^1 \times S^1$ .* Le tore  $S^1 \times S^1$  est un  $\text{K}(\mathbb{Z}^2, 1)$ . Soit  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . La classe fondamentale

$$[S^1 \times S^1] \in H_2(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) = H_2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z})$$

est représentée par le 2-cycle

$$e_1 \wedge e_2 := [e_1|e_2] - [e_2|e_1] \in \mathbf{B}_2(\mathbb{Z}^2).$$

On a donc

$$Z_\alpha(S^1 \times S^1) = |G|^{-1} \sum_{\gamma \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)} \langle \alpha, \gamma_*(\{e_1 \wedge e_2\}) \rangle$$

et, par functorialité du complexe bar,

$$\begin{aligned} Z_\alpha(S^1 \times S^1) &= |G|^{-1} \sum_{\gamma \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)} \langle \alpha, [\gamma(e_1)|\gamma(e_2)] - [\gamma(e_2)|\gamma(e_1)] \rangle \\ &= |G|^{-1} \sum_{g, h \in G, [g, h]=1} a(g|h) \cdot a(h|g)^{-1} \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{h \in N_g} \varepsilon_g(h) \end{aligned}$$

où  $N_g := \{h \in G : [g, h] = 1\}$  et  $\varepsilon_g(h) := a(g|h) \cdot a(h|g)^{-1}$ . Parce que  $a$  est un 2-cocycle,  $\varepsilon_g : N_g \rightarrow \text{U}(1)$  est un homomorphisme si bien que

$$Z_\alpha(S^1 \times S^1) = \sum_{g \in G: a\text{-régulier}} \frac{1}{|G/N_g|}.$$

La propriété d'être  $a$ -régulier étant préservée par conjugaison,  $Z_\alpha(S^1 \times S^1)$  est donc le nombre de classes de conjugaisons d'éléments  $a$ -réguliers :

$$Z_\alpha(S^1 \times S^1) = |\text{R}(G; a)|.$$

□

**3.3. L'exemple du tore en dimension  $d = 3$ .** L'exemple du tore  $S^1 \times S^1 \times S^1$  est fort instructif et est traité dans [7]. Représentons  $\alpha \in H^3(G; \text{U}(1))$  par un 3-cocycle normalisé  $a : G \times G \times G \rightarrow \text{U}(1)$ . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} a(h|k|l) \cdot a(gh|k|l)^{-1} \cdot a(g|h|kl) \cdot a(g|h|kl)^{-1} \cdot a(g|h|k) &= 1, \\ a(1|h|k) &= 1, \quad a(g|1|k) = 1 \quad \text{et} \quad a(g|h|1) = 1. \end{aligned}$$

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . La classe fondamentale

$$[S^1 \times S^1 \times S^1] \in H_3(S^1 \times S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) = H_3(\mathbb{Z}^3; \mathbb{Z})$$

est représentée par le 3-cycle

$$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 := \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\tau) \cdot [e_{\tau(1)}|e_{\tau(2)}|e_{\tau(3)}] \in \mathbb{B}_3(\mathbb{Z}^3).$$

On obtient donc

$$Z_\alpha(S^1 \times S^1 \times S^1) = |G|^{-1} \sum_{\gamma \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^3, G)} \langle \alpha, \gamma_*(\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}) \rangle$$

et, par functorialité du complexe bar,

$$\begin{aligned} Z_\alpha(S^1 \times S^1 \times S^1) &= |G|^{-1} \sum_{\gamma \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^3, G)} \left\langle \alpha, \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\tau) \cdot [\gamma(e_{\tau(1)})|\gamma(e_{\tau(2)})|\gamma(e_{\tau(3)})] \right\rangle \\ &= |G|^{-1} \sum_{\substack{g, h, k \in G \\ [g, h]=[h, k]=[g, k]=1}} \frac{a(g|h|k)a(k|g|h)a(h|k|g)}{a(h|g|k)a(g|k|h)a(k|h|g)} \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{h, k \in N_g \\ [h, k]=1}} a_g(h|k) \cdot a_g(k|h)^{-1} \end{aligned}$$

où nous posons  $N_g := \{h \in G : [g, h] = 1\}$  et  $a_g(h|k) := a(g|h|k) \cdot a(h|k|g) \cdot a(h|g|k)^{-1}$ . On vérifie que  $a_g : N_g \times N_g \rightarrow \mathbb{U}(1)$  est un 2-cocycle, ce qui nous permet d'écrire

$$Z_\alpha(S^1 \times S^1 \times S^1) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} |N_g| \cdot Z_{\{a_g\}}(S^1 \times S^1).$$

On déduit de §3.2 que

$$Z_\alpha(S^1 \times S^1 \times S^1) = \sum_{g \in G} \frac{1}{|G/N_g|} |\mathbb{R}(N_g; a_g)|$$

où  $\mathbb{R}(N_g; a_g)$  est l'ensemble des  $a_g$ -représentations irréductibles de  $N_g$ , à isomorphisme près. On conclut que

$$(3.1) \quad Z_\alpha(S^1 \times S^1 \times S^1) = \sum_{\{g\} \in \widehat{G}} |\mathbb{R}(N_g; a_g)|$$

où  $\widehat{G}$  désigne l'ensemble des classes de conjugaisons du groupe  $G$ .

Dans la suite, nous nous plaçons toujours en dimension  $d = 3$ .

#### 4. FORMULE PAR SOMME D'ÉTATS POUR LES INVARIANTS DE DW

Soit  $M$  une 3-variété fermée orientée et connexe, et soit  $\alpha \in H^3(G; \mathbb{U}(1))$  où  $G$  est un groupe fini. Nous donnons maintenant la formule par « somme d'états » pour  $Z_\alpha(M)$ . Ceci nécessite le *choix* d'une triangulation

$$T = T^0 \cup T^1 \cup T^2 \cup T^3$$

de  $M$ , avec un ordre total sur  $T^0$ , ainsi que le choix d'un 3-cocycle normalisé

$$a : G \times G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(1)$$

représentant  $\alpha$ .

4.1. **La formule.** Un *état* de  $T$  est une application

$$\rho : T^1 \longrightarrow G$$

satisfaisant la condition de « platitude »

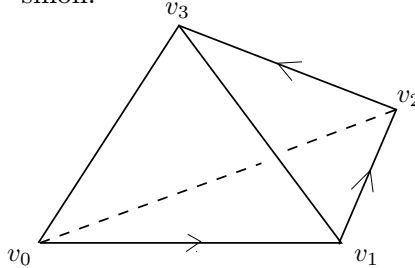
$$\rho(v_0, v_1) \cdot \rho(v_1, v_2) = \rho(v_0, v_2), \quad \forall (v_0, v_1, v_2) \in T^2 \text{ avec } v_0 < v_1 < v_2.$$

Le *poids* de  $\rho$  sur  $\sigma = (v_0, v_1, v_2, v_3) \in T^3$ , où  $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$ , est

$$w_\sigma(\rho) := a(\rho(v_0, v_1) | \rho(v_1, v_2) | \rho(v_2, v_3))^{\varepsilon(\sigma)}$$

où

$$\varepsilon(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{si } (\overrightarrow{v_0 v_1}, \overrightarrow{v_1 v_2}, \overrightarrow{v_2 v_3}) \text{ donne l'orientation de } M, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

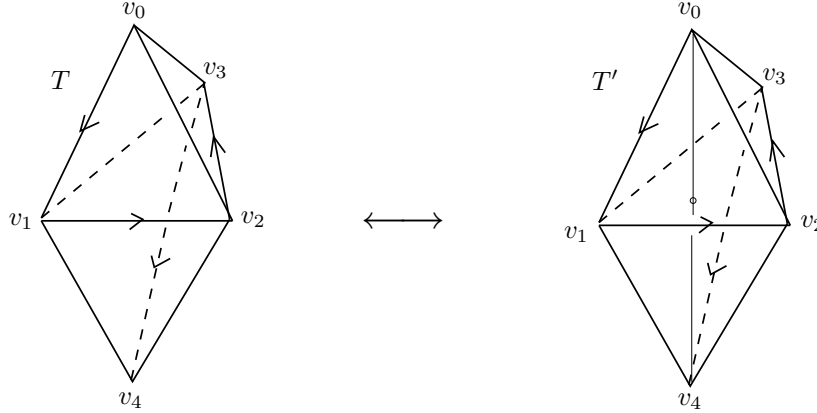


Nous notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble des états de  $T$ .

**Théorème 4.1** (Dijkgraaf–Witten [7]). *L'invariant de Dijkgraaf–Witten de  $M$ , relatif à la classe de cohomologie  $\alpha$ , est donné par la formule suivante :*

$$(4.1) \quad Z_\alpha(M) = |G|^{-|T^0|} \cdot \sum_{\rho \in \mathcal{M}} \prod_{\sigma \in T^3} w_\sigma(\rho).$$

On peut montrer « directement » que la quantité de droite dans (4.1) ne dépend pas du choix de l'ordre total sur  $T^0$ , ni de la triangulation  $T$  de  $M$ , ni du choix de  $a$  dans la classe  $\alpha$  : cf. [19] pour les détails. Par exemple, le mouvement de Pachner 2  $\leftrightarrow$  3 reliant deux triangulations  $T$  et  $T'$  de  $M$



se reflète<sup>1</sup> exactement dans la condition du cocycle

$$a(g|h|k) \cdot a(h|k|l) = a(gh|k|l) \cdot a(g|h|kl)^{-1} \cdot a(g|h|kl).$$

**4.2. Preuve de la formule.** Pour démontrer le Théorème 4.1, commençons par réécrire le terme de droite de (4.1) et, pour cela, introduisons le « groupe de jauge »

$$\mathcal{G} := \text{Map}(T^0, G).$$

Il agit à gauche sur  $\mathcal{M}$  par

$$(\psi, \rho) \mapsto \psi \cdot \rho \quad \text{avec} \quad (\psi \cdot \rho)(v, w) := \psi(v) \cdot \rho(v, w) \cdot \psi(w)^{-1}, \quad \forall (v, w) \in T^1 \text{ avec } v < w.$$

La condition de cocyclicité pour  $a$  entraîne qu'une transformée de jauge ne change pas le poids d'un état :

$$\prod_{\sigma \in T^3} w_\sigma(\rho) = \prod_{\sigma \in T^3} w_\sigma(\psi \cdot \rho)$$

Soit  $\mathcal{G}_1$  le sous-groupe de  $\mathcal{G}$  constitué des  $\psi$  satisfaisant  $\psi(\cdot) = 1$ . On a alors

$$|G|^{-|T^0|} \sum_{\rho \in \mathcal{M}} \prod_{\sigma \in T^3} w_\sigma(\rho) = |G|^{-|T^0|} \sum_{\{\rho\} \in \mathcal{M}/\mathcal{G}_1} \frac{|\mathcal{G}_1|}{|\text{Stab}(\rho)|} \prod_{\sigma \in T^3} w_\sigma(\rho)$$

et, puisque  $\text{Stab}(\rho)$  est trivial pour tout état  $\rho$ , nous sommes ramenés à montrer l'égalité :

$$(4.2) \quad Z_\alpha(M) \stackrel{?}{=} |G|^{-1} \sum_{\{\rho\} \in \mathcal{M}/\mathcal{G}_1} \prod_{\sigma \in T^3} w_\sigma(\rho).$$

**Lemme 4.2.** *Il existe une bijection canonique entre  $\mathcal{M}/\mathcal{G}_1$  et  $\text{Hom}(\pi_1(M, \cdot), G)$ .*

<sup>1</sup>Ici, les sommets sont ordonnés de sorte que  $v_0 < v_1 < v_2 < v_3 < v_4$  et  $g, h, k, l \in G$  correspondent à  $\rho(v_0, v_1)$ ,  $\rho(v_1, v_2)$ ,  $\rho(v_2, v_3)$ ,  $\rho(v_3, v_4)$  respectivement.



*Démonstration.* Soit  $\rho \in \mathcal{M}$ . Tout lacet  $l$  basé en  $\bullet$  peut être déformé de façon à être contenu dans le 1-squelette de  $T$ . Alors,  $l$  s'écrit comme suite de cotés de  $T$

$$l = c_1^{\epsilon_1} \cdots c_r^{\epsilon_r}$$

où chaque signe  $\epsilon_i$  compare l'orientation de  $l$  avec l'ordre des sommets de  $T$ . On pose

$$\gamma_\rho(l) := \rho(c_1)^{\epsilon_1} \cdots \rho(c_r)^{\epsilon_r} \in G,$$

quantité qui ne dépend que de la classe d'homotopie de  $l$  du fait de la platitude de  $\rho$ . On définit ainsi une application

$$A : \mathcal{M}/\mathcal{G}_\bullet \longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(M, \bullet), G), \quad \{\rho\} \longmapsto \gamma_\rho.$$

Soit maintenant  $\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(M, \bullet), G)$ . On choisit, pour chaque  $v \in T^0$ , un chemin  $c_v$  reliant  $\bullet$  à  $v$ , et on prend pour  $c$ , le chemin constant. On définit  $\rho_\gamma \in \mathcal{M}$  par  $\rho_\gamma(v, w) = \gamma(c_v \cdot (v, w) \cdot c_w^{-1})$  pour tout  $(v, w) \in T^1$  avec  $v < w$ . Un choix différent des chemins  $c_v$  se traduit sur  $\rho_\gamma$  par une transformée de jauge. On définit ainsi une application

$$B : \text{Hom}(\pi_1(M, \bullet), G) \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{G}_\bullet, \quad \gamma \longmapsto \{\rho_\gamma\}.$$

On vérifie facilement que  $A$  et  $B$  sont inverses l'une de l'autre [1, Proposition 2.1].  $\square$

Soit  $\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(M, \bullet), G)$  et soit un état  $\rho$  correspondant à  $\gamma$  par le lemme précédent. Pour prouver (4.2), il suffit de démontrer l'égalité

$$(4.3) \quad \langle \alpha, (f_\gamma)_*([M]) \rangle \stackrel{?}{=} \prod_{\sigma \in T^3} w_\sigma(\rho).$$

Pour décrire  $f_\gamma$ , nous allons utiliser le modèle simplicial de  $K(G, 1)$  donné en §2.3. Pour tout  $\sigma = (v_0, v_1, v_2, v_3) \in T^3$  avec  $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$ , on pose

$$\tilde{\sigma} := (1, \rho(v_0, v_1), \rho(v_0, v_1)\rho(v_1, v_2), \rho(v_0, v_1)\rho(v_1, v_2)\rho(v_2, v_3)) \in G^4$$

et on définit une application linéaire  $\sigma \rightarrow \widetilde{K}^\Delta(G, 1)$  d'image  $\Delta^{\tilde{\sigma}}$  par

$$(v_0, v_1, v_2, v_3) \longmapsto (v_0^{\tilde{\sigma}}, v_1^{\tilde{\sigma}}, v_2^{\tilde{\sigma}}, v_3^{\tilde{\sigma}}).$$

Par projection  $p : \widetilde{K}^\Delta(G, 1) \rightarrow K^\Delta(G, 1)$ , on obtient une application  $\sigma \rightarrow K^\Delta(G, 1)$ . Par recollement sur tous les  $\sigma \in T^3$ , nous définissons ainsi une application continue  $f_\gamma : M \rightarrow K^\Delta(G, 1)$  induisant  $\gamma$  au niveau du  $\pi_1(-)$ . Puisque

$$[M] = \left\{ \sum_{\sigma \in T^3} \varepsilon(\sigma) \cdot \sigma \right\} \in H_3(M; \mathbb{Z}),$$

nous concluons que

$$\begin{aligned} \langle \alpha, (f_\gamma)_*([M]) \rangle &= \prod_{\sigma \in T^3} \langle a, f_\gamma(\sigma) \rangle^{\varepsilon(\sigma)} = \prod_{\substack{\sigma=(v_0, v_1, v_2, v_3) \in T^3 \\ v_0 < v_1 < v_2 < v_3}} \langle a, p(\Delta^{\tilde{\sigma}}) \rangle^{\varepsilon(\sigma)} \\ &= \prod_{\substack{\sigma=(v_0, v_1, v_2, v_3) \in T^3 \\ v_0 < v_1 < v_2 < v_3}} a(\rho(v_0, v_1)|\rho(v_1, v_2)|\rho(v_2, v_3))^{\varepsilon(\sigma)} = \prod_{\sigma \in T^3} w_\sigma(\rho). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du Théorème 4.1.

*Remarque 4.3.* En pratique, il est plus commode de présenter la variété  $M$  par une triangulation  $T$  souffrant de singularités. Par exemple,  $T$  peut ne posséder qu'un seul et unique sommet si elle est duale d'une « épine spéciale » de  $M$  privée d'une boule [12]. Heureusement, le Théorème 4.1 s'étend aux triangulations singulières [16, Appendix A].

## 5. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INVARIANTS DE DW

Soit  $\alpha \in H^3(G; \mathbb{U}(1))$  où  $G$  est un groupe fini. Voici quelques propriétés qu'on démontre facilement pour l'invariant  $Z_\alpha$ . Tout d'abord, il peut détecter l'orientation :

**Proposition 5.1.** *Pour toute 3-variété fermée orientée et connexe  $M$ , on a*

$$Z_\alpha(-M) = \overline{Z_\alpha(M)}$$

où  $\overline{\phantom{x}}$  désigne la conjugaison complexe.

*Démonstration.* Pour tout  $\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(M, \bullet), G)$ , on a

$$\langle \alpha, (f_\gamma)_*([-M]) \rangle = \langle \alpha, (f_\gamma)_*([M]) \rangle^{-1} = \overline{\langle \alpha, (f_\gamma)_*([M]) \rangle}.$$

□

De plus, l'invariant  $Z_\alpha$  renormalisé est multiplicatif :

**Proposition 5.2.** *Pour toutes 3-variétés fermées orientées connexes  $M_1$  et  $M_2$ , on a*

$$\tilde{Z}_\alpha(M_1 \# M_2) = \tilde{Z}_\alpha(M_1) \cdot \tilde{Z}_\alpha(M_2)$$

où  $\tilde{Z}_\alpha(M_i) := |G| \cdot Z_\alpha(M_i)$ .

*Démonstration.* Soit  $B_i \subset M_i$  une boule contenant le point base  $\bullet$  ( $i = 1, 2$ ). Pour tout  $\gamma_i \in \text{Hom}(\pi_1(M_i, \bullet), G)$ , soit  $f_{\gamma_i} : M_i \rightarrow \mathbb{K}(G, 1)$  induisant  $\gamma_i$  au niveau du  $\pi_1(-)$ . On peut déformer  $f_{\gamma_i}$  de sorte que  $f_{\gamma_i}(B_i) = \{\bullet\}$ . On forme

$$M_1 \# M_2 = (M_1 \setminus \text{int}(B_1)) \cup_{\partial} (M_2 \setminus \text{int}(B_2))$$

et  $f : M_1 \# M_2 \rightarrow \mathbb{K}(G, 1)$  par recollement des restrictions de  $f_{\gamma_1}$  et  $f_{\gamma_2}$ . Au niveau du  $\pi_1(-)$ ,  $f$  induit  $\gamma_1 * \gamma_2$  pour la décomposition en produit libre :

$$\pi_1(M_1 \# M_2, \bullet) = \pi_1(M_1, \bullet) * \pi_1(M_2, \bullet).$$

De plus,  $f_*([M_1 \# M_2]) = (f_{\gamma_1})_*([M_1]) + (f_{\gamma_2})_*([M_2])$ , d'où

$$\langle \alpha, f_*([M_1 \# M_2]) \rangle = \langle \alpha, (f_{\gamma_1})_*([M_1]) \rangle \cdot \langle \alpha, (f_{\gamma_2})_*([M_2]) \rangle.$$

Puisqu'on a la bijection

$$\text{Hom}(\pi_1(M_1, \bullet), G) \times \text{Hom}(\pi_1(M_2, \bullet), G) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(M_1 \# M_2, \bullet), G), \quad (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 * \gamma_2,$$

nous obtenons l'identité  $Z_\alpha(M_1) \cdot Z_\alpha(M_2) = |G|^{-1} Z_\alpha(M_1 \# M_2)$ . □

Enfin, l'invariant  $Z_\alpha$  ne dépend que du type d'homotopie :

**Proposition 5.3.** *Soient  $M$  et  $M'$  des 3-variétés fermées orientées et connexes. S'il existe une équivalence d'homotopie  $e : M \rightarrow M'$  préservant l'orientation, on a alors*

$$Z_\alpha(M) = Z_\alpha(M').$$

*Démonstration.* La composition avec  $e_*$  établit une bijection entre  $\text{Hom}(\pi_1(M', \bullet), G)$  et  $\text{Hom}(\pi_1(M, \bullet), G)$  et, pour tout  $\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(M', \bullet), G)$ , on a

$$\langle \alpha, (f_\gamma)_*([M']) \rangle = \langle \alpha, (f_\gamma)_*(e_*([M])) \rangle = \langle \alpha, (f_{\gamma e})_*([M]) \rangle = \langle \alpha, (f_{\gamma e_*})_*([M]) \rangle.$$

□

*Exemple 5.4.* Soit  $p \geq 0$  un entier et soient  $q, q' \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  inversibles. Les espaces lenticulaires  $L(p, q)$  et  $L(p, q')$  peuvent avoir le même type d'homotopie et ne pas être homéomorphes<sup>2</sup>. Donc, les invariants de DW ne distinguent pas les espaces lenticulaires.

<sup>2</sup>Il existe un homéomorphisme  $L(p, q) \rightarrow L(p, q')$  préservant l'orientation si, et seulement si,  $q' = q^{\pm 1}$ . Il existe une équivalence d'homotopie  $L(p, q) \rightarrow L(p, q')$  préservant l'orientation si, et seulement si, il existe  $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  tel que  $q' = a^2 q$ .

## 6. DES INVARIANTS QUANTIQUES DE WITTEN AUX INVARIANTS DE DW

Dans cette section, nous expliquons comment voir les invariants de Dijkgraaf–Witten comme des analogues « discrets » des invariants quantiques de Witten [20]. Commençons par rappeler la « définition » de ces derniers.

**6.1. Invariants quantiques de Witten.** Soit  $G$  un groupe de Lie compact dont l’algèbre de Lie est notée  $\mathfrak{g}$ . On fait le choix d’une forme

$$Q : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$$

bilinéaire, symétrique et  $G$ -invariante.

*Exemple 6.1.* On peut prendre pour  $Q$  la forme de Cartan–Killing de  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathfrak{g}$  est simple,  $Q$  est forcément proportionnelle à cette dernière.

La théorie de Chern–Weil nous apprend que  $Q$  définit une classe caractéristique

$$c_Q(Y) \in H^4(N; \mathbb{R})$$

pour tout  $G$ -fibré principal

$$G \twoheadrightarrow Y \xrightarrow{p} N$$

sur une variété fermée lisse  $N$ . Plus précisément, si  $\omega \in \Omega^1(Y; \mathfrak{g})$  est une forme de connexion sur  $Y$  de courbure  $\Omega \in \Omega^2(Y; \mathfrak{g})$ , la 4-forme différentielle

$$Q(\Omega) := Q \circ (\Omega \wedge \Omega) \in \Omega^4(Y; \mathbb{R})$$

est fermée et est le pull-back par  $p$  d’une unique 4-forme sur  $N$ , qu’on notera  $p_*Q(\Omega)$ . On a alors

$$c_Q(Y) = \{p_*Q(\Omega)\} \in H^4(N; \mathbb{R}).$$

La *forme de Chern–Simons* [4] d’une forme de connexion  $\omega$  sur  $Y$  est définie par

$$TQ(\omega) := Q(\omega \wedge d\omega) + \frac{1}{3}Q(\omega \wedge [\omega, \omega]) \in \Omega^3(Y; \mathbb{R}).$$

Sa propriété fondamentale est que

$$(6.1) \quad dTQ(\omega) = Q(\Omega).$$

Nous nous donnons maintenant une 3-variété fermée orientée et lisse  $M$ . On note  $\mathcal{C}(M)$  l’ensemble des connexions sur un  $G$ -fibré principal de base  $M$ , à isomorphisme près. Faisons deux hypothèses, l’une portant sur le groupe de Lie  $G$  et l’autre sur la forme quadratique  $Q$  :

- (H) Le groupe de Lie  $G$  est connexe et simplement connexe.
- (I) La classe caractéristique  $c_Q$  définie par  $Q$  est entière<sup>3</sup>.

La condition homotopique (H) entraîne que tout  $G$ -fibré principal de base  $M$  est trivial, puisque  $\pi_2(G)$  est par ailleurs trivial. La condition d’intégralité (I) nous permet alors de définir une fonction

$$\text{CS} : \mathcal{C}(M) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

par la formule

$$(6.2) \quad \text{CS}(\omega) := \int_M s^*TQ(\omega) \pmod{1}$$

où  $s : M \rightarrow X$  est une section du  $G$ -fibré principal  $X$  sur lequel  $\omega$  est définie.

---

<sup>3</sup>On demande précisément que, pour tout  $G$ -fibré principal  $Y$  sur une variété fermée lisse  $N$ ,  $c_Q(Y) \in H^4(N; \mathbb{R})$  est dans l’image de l’homomorphisme canonique  $r : H^4(N; \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(N; \mathbb{R})$ .

*Exemple 6.2.* On prend  $G = \mathrm{SU}(2)$  et  $Q = C_2$  définie par

$$C_2(D \otimes D) := \frac{\mathrm{Tr}(D^2)}{8\pi^2} \quad \forall D \in \mathfrak{su}(2),$$

la classe caractéristique associée à  $C_2$  étant la deuxième classe de Chern. On obtient

$$\mathrm{CS}(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \mathrm{Tr} \left( dA \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

pour toute 1-forme  $A \in \Omega^1(M; \mathfrak{su}(2))$  interprétée comme connexion sur le  $\mathrm{SU}(2)$ -fibré principal trivialisé  $\mathrm{SU}(2) \times M$ .

*Définition 6.3.* Sous les hypothèses (H) et (I), l'*invariant quantique de Witten* relatif au groupe de Lie  $G$  et à la forme quadratique  $Q$  est la « quantité »

$$(6.3) \quad Z(M) := \int_{\mathcal{C}(M)} \exp(2i\pi \mathrm{CS}(\omega)) d\omega \in \mathbb{C}.$$

Bien sûr, cette intégrale n'est pas définie mathématiquement ... mais, elle a inspiré bien des constructions en topologie quantique!

**6.2. Une extension des invariants quantiques de Witten.** Dans leur papier [7], Dijkgraaf et Witten suppriment l'hypothèse (H) sur le groupe de Lie compact  $G$ , mais maintiennent l'hypothèse (I) sur la forme quadratique  $G$ -invariante  $Q$ . Cette hypothèse peut être reformulée ainsi : la classe caractéristique du  $G$ -fibré principal universel défini par  $Q$

$$c_Q \in H^4(\mathrm{B}G; \mathbb{R})$$

est dans l'image de l'homomorphisme canonique  $r : H^4(\mathrm{B}G; \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(\mathrm{B}G; \mathbb{R})$ . En fait, Dijkgraaf et Witten confortent cette hypothèse en *spécifiant* un antécédent

$$c_Q^{\mathbb{Z}} \in H^4(\mathrm{B}G; \mathbb{Z})$$

de  $c_Q$  par  $r$ . Alors, pour toute 3-variété fermée orientée  $M$ , ils définissent une fonction

$$\mathrm{CS} : \mathcal{C}(M) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

qui *dépend* du choix de  $c_Q^{\mathbb{Z}}$ . Ils procèdent de la façon suivante.

Soit  $\omega$  une connexion sur un  $G$ -fibré principal  $X$  de base  $M$ . Le fibré  $X$  n'est pas toujours trivial, i.e. que son application classifiante

$$x : M \longrightarrow \mathrm{B}G$$

n'est pas toujours homotopiquement triviale. Néanmoins, la classe d'homologie

$$x_*([M]) \in H_3(\mathrm{B}G; \mathbb{Z})$$

est toujours de torsion puisque  $H_3(\mathrm{B}G; \mathbb{R}) = 0$ , d'après un résultat classique de Borel.

**Fait 6.4.** Soit  $E$  un CW-complexe et soit  $\Omega_3^{SO}(E)$  le groupe des classes de cobordisme  $\{(N, y)\}$ , où  $N$  est une 3-variété fermée orientée et où  $y : N \rightarrow E$  est une application continue. Alors, l'application

$$\Omega_3^{SO}(E) \longrightarrow H_3(E; \mathbb{Z}), \quad \{(N, y)\} \longmapsto y_*([N])$$

est un isomorphisme.

En appliquant ce fait à  $E = BG$ , nous en déduisons qu'il existe un entier  $n \geq 1$ , une 4-variété compacte orientée  $N$  et un  $G$ -fibré principal

$$G \twoheadrightarrow Y \xrightarrow{p} \twoheadrightarrow N$$

tels que

$$\partial N = \underbrace{M \sqcup \cdots \sqcup M}_n$$

et  $Y$  coïncide avec  $X$  sur chacune des composantes connexes de  $\partial N$ . On étend alors  $\omega$  en une forme de connexion sur  $Y$  qu'on note encore  $\omega$ , on choisit une application classifiante  $y : N \rightarrow BG$  qui classe  $Y$  et étend  $x$ , et on pioche un 4-cocycle singulier  $c$  dans la classe  $c_Q^{\mathbb{Z}} \in H^4(BG; \mathbb{Z})$ .

**Lemme 6.5.** *La classe*

$$(6.4) \quad \frac{1}{n} \cdot \left( \int_N p_* Q(\Omega) - \langle y^*(c), N \rangle \right) \bmod 1$$

*ne dépend que de la connexion  $\omega$ , mais pas des choix intermédiaires : nous la notons  $CS(\omega) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . En outre, elle est invariante par isomorphisme de fibrés.*

*Démonstration partielle.* Vérifions, par exemple, que (6.4) ne dépend pas du choix de  $N$ , ni de  $Y$ , ni de l'extension  $\omega$  de  $\omega$  à  $Y$ , ni de l'extension  $y$  de  $x$ . Supposons que d'autres choix  $N', Y', \omega', y'$  ont été faits. Par recollement, on obtient alors une 4-variété orientée fermée  $\hat{N}$ , un  $G$ -fibré principal  $\hat{Y}$  de base  $\hat{N}$  (et de projection  $\hat{p}$ ) muni d'une connexion  $\hat{\omega}$  et d'une application classifiante  $\hat{y}$ . On a alors

$$\int_{\hat{N}} \hat{p}_* Q(\hat{\Omega}) = \langle c_Q(\hat{Y}), [\hat{N}] \rangle = \langle \hat{y}^* c_Q, [\hat{N}] \rangle = \langle \hat{y}^* c, \hat{N} \rangle,$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

Considérons maintenant deux situations « extrêmes » pour l'invariant  $CS(\omega)$  de la connexion  $\omega$  et pour la classe (6.4) qui le définit :

- *Supposons que le fibré  $X$  est trivial.* Soit  $N$  une 4-variété telle que  $\partial N = M$ , soit  $Y$  une  $G$ -fibré trivial de base  $N$  étendant  $X$ , soit  $s$  une section de  $Y$  et soit, enfin,  $\omega$  une connexion sur  $Y$  étendant  $\omega$ . La formule (6.4) donne alors

$$CS(\omega) = \int_N s^* Q(\Omega) \bmod 1 \stackrel{(6.1)}{=} \int_N s^* dTQ(\omega) \bmod 1 = \int_M s^* TQ(\omega) \bmod 1$$

et, donc, s'accorde avec (6.2). Nous sommes donc ramenés à la situation de §6.1.

- *Supposons que  $Q = 0$ .* La suite exacte longue en cohomologie pour les coefficients

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow U(1) \longrightarrow 0$$

entraîne que la suite

$$0 \longrightarrow H^3(BG; U(1)) \xrightarrow{\beta} H^4(BG; \mathbb{Z}) \xrightarrow{r} H^4(BG; \mathbb{R})$$

est exacte. Le choix de  $c_Q^{\mathbb{Z}} \in H^4(BG; \mathbb{Z})$  tel que  $r(c_Q^{\mathbb{Z}}) = 0$ , équivaut donc à celui d'un  $\alpha \in H^3(BG; U(1))$ , et la formule (6.4) donne alors

$$CS(\omega) = -\frac{1}{n} \langle y^*(c), N \rangle = -\frac{1}{2i\pi} \log(\langle x^*(\alpha), [M] \rangle) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Donc, dans ce cas,  $\text{CS}(\omega)$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $x$ , i.e. de la classe d'isomorphisme du fibré  $X$ .

Dans cette dernière situation, l'invariant quantique de Witten (6.3) est la « quantité »

$$(6.5) \quad Z(M) = \int_{[M, \text{BG}]} \langle \alpha, x_*([M]) \rangle^{-1} dx.$$

Quoiqu'elle n'ait pas de sens mathématique, cette intégrale inspire la définition des invariants de Dijkgraaf–Witten. En effet, revenons à un groupe fini  $G$  et soit  $\alpha \in H^3(G; \mathbb{U}(1))$ . Puisque  $\text{K}(G, 1)$  est un espace classifiant pour les  $G$ -fibrés principaux, nous avons la bijection

$$[M, \text{BG}] \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(\pi_1(M, \bullet), G), \{x\} \longmapsto x_*.$$

Si on pense à  $G$  comme l'analogie discret d'un groupe de Lie compact, l'invariant quantique de Witten (6.5) qui correspondrait à la classe  $c_0^{\mathbb{Z}} := \beta(\alpha) \in H^4(\text{BG}; \mathbb{Z})$  coïncide essentiellement avec l'invariant de Dijkgraaf–Witten relatif à  $\alpha$  :

$$Z(M) = |G| \cdot \overline{Z_\alpha(M)} \in \mathbb{C}.$$

## 7. POUR ALLER PLUS LOIN . . .

Pour conclure, voici quelques sujets qui dépassent la nature introductive de cette note.

**7.1. L'algèbre de quasi-Hopf  $D^a(G)$ .** Soit  $G$  un groupe fini et soit

$$a : G \times G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(1)$$

un 3-cocycle normalisé de classe  $\alpha \in H^3(G; \mathbb{U}(1))$ . Dijkgraaf, Pasquier et Roche introduisent dans [6] l'algèbre de quasi-Hopf quasi-triangulaire enrubannée  $D^a(G)$ , qui est une déformation du double de  $\text{Map}(G, \mathbb{C})$ . Altschuler et Coste généralisent dans [2] la construction des invariants de Reshetikhin–Turaev [15], des algèbres de Hopf aux algèbres de quasi-Hopf. Ils obtiennent ainsi un invariant des entrelacs en bande dans  $S^3$ , coloriés par des représentations de  $D^a(G)$ . Lorsqu'on colorie uniformément avec la représentation régulière de  $D^a(G)$ , cet invariant de l'entrelacs en bande  $L$  définit un invariant  $\tilde{Z}_a(S_L^3)$  de la 3-variété  $S_L^3$ , obtenue par chirurgie le long de  $L$ . De plus, l'invariant  $\tilde{Z}_a$  ne dépend que la classe  $\alpha$ . Altschuler et Coste conjecturent dans [2] que leur invariant coïncide, à normalisation près, avec l'invariant de Dijkgraaf–Witten :

$$\tilde{Z}_\alpha(M) \stackrel{?}{=} |G| \cdot Z_\alpha(M).$$

Cette conjecture a été démontrée plus tard par Freed [8].

**7.2. Extension à une TQFT.** L'invariant  $Z_\alpha$  des 3-variétés fermées s'étend en une théorie quantique de champs topologique de dimension  $2 + 1$ . Notons que l'extension dépend du choix d'un 3-cocycle  $a$  dans la classe  $\alpha$ . Cette extension est esquissée dans [7] et détaillée dans [9], voir aussi [19].

L'existence de cette TQFT entraîne que, pour toute surface fermée orientée et connexe  $\Sigma$ , le nombre complexe  $Z_\alpha(\Sigma \times S^1)$  est un entier, à savoir la dimension de l'espace vectoriel associé à  $\Sigma$  par cette TQFT. On trouve dans [7] la formule

$$Z_\alpha(\Sigma \times S^1) = \sum_{\{g\} \in \hat{G}} \sum_{\{(V, \rho)\} \in \mathbb{R}(N_g; a_g)} \left( \frac{|N_g|}{\dim(V)} \right)^{-\chi(\Sigma)}$$

qui généralise (3.1).

**7.3. Cas d'un groupe abélien.** Pour toute 3-variété fermée orientée et connexe  $M$ , le *type d'homotopie abélien* de  $M$  est la classe d'isomorphisme de paires

$$(H, f_*([M]) \in H_3(H; \mathbb{Z}))$$

où  $H$  est un groupe isomorphe à  $H_1(M; \mathbb{Z})$  et où  $f : M \rightarrow K(H, 1)$  induit un isomorphisme au niveau du  $H_1(-; \mathbb{Z})$ . D'après [17], c'est une approximation du type d'homotopie de  $M$ .

**Théorème 7.1** (Cochran–Gerges–Orr [5]). *Si  $M$  et  $M'$  sont des 3-variétés fermées orientées et connexes, alors les énoncés suivants sont équivalents :*

- (1)  $M$  et  $M'$  ont le même type d'homotopie abélien.
- (2)  $M$  et  $M'$  sont  $H_1$ -cobordantes, i.e. il existe une 4-variété  $W$  compacte orientée de bord  $M \sqcup (-M')$  telle que les inclusions  $i : M \hookrightarrow W$  et  $i' : M' \hookrightarrow W$  induisent des isomorphismes au niveau du  $H_1(-; \mathbb{Z})$ .
- (3)  $M$  et  $M'$  ont des anneaux de cohomologie et des formes d'enlacement isomorphes.

Soit  $G$  un groupe fini abélien et soit  $\alpha \in H^3(G; \mathbb{U}(1))$ . On montre facilement que  $Z_\alpha(M)$  est déterminé par le type d'homotopie abélien de  $M$ . Donc,  $Z_\alpha(M)$  est déterminé par l'anneau de cohomologie et la forme d'enlacement de  $M$ .

*Exemple 7.2.* Si  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , l'invariant  $Z_\alpha(M)$  est déterminé par les invariants de Murakami–Ohtsuki–Okada [13]. Ces invariants de  $M$  sont des sommes de Gauss qui ne dépendent que de la forme d'enlacement de  $M$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] D. Altschuler, A. Coste, *Invariants of three-manifolds from finite group cohomology*, J. Geom. Phys. 11 (1993) 191–203.
- [2] D. Altschuler, A. Coste, *Quasi-quantum groups, knots, three-manifolds and topological field theory*, Comm. Math. Phys. 150 (1992) 83–107.
- [3] K. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics 87. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [4] S.-S. Chern, J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. Math. 99 (1974) 48–69.
- [5] T. Cochran, A. Gerges, K. Orr, *Dehn surgery equivalence relations on 3-manifolds*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 131 (2001) 97–127.
- [6] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, P. Roche, *Quasi-quantum groups related to orbifold models*, Nucl. Phys. B. (Proc. Suppl.) 18B (1990) 60–72.
- [7] R. Dijkgraaf, E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. 129 (1990) 393–429.
- [8] D. Freed, *Quantum groups from path integrals*, prépublication (1995) [arXiv:q-alg/9501025](https://arxiv.org/abs/q-alg/9501025).
- [9] D. Freed, F. Quinn, *Chern–Simons theory with finite gauge group*, Comm. Math. Phys. 156 (1993) 435–472.
- [10] J. Hilton, U. Stambach, *A course in homological algebra*. Graduate Texts in Mathematics 4. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.
- [11] G. Karpilovsky, *Projective representations of finite groups*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 94. Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.
- [12] S. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. 2nd ed.* Algorithms and Computations in Mathematics 9. Springer, Berlin, 2007.
- [13] H. Murakami, T. Ohtsuki, M. Okada, *Invariants of three-manifolds derived from linking matrices of framed links*, Osaka J. Math. 29 (1992) 545–572.

- [14] A. Mednykh, *Determination of the number of nonequivalent coverings over a compact Riemann surface*, Dokl. Akad. Nauk USSR 239 (1978), 269-271. English translation : Soviet Math. Doklady 19 (1978), 318-320.
- [15] N. Reshetikhin, V. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. 127 (1990) 1-26.
- [16] M. Sokolov, *Quantum invariants, skein modules and periodicity of 3-manifolds*, Ph.D. thesis (2000) the George Washington University.
- [17] C. Thomas, *The oriented homotopy type of compact 3-manifolds*, Proc. London Math. Soc. 19 (1969) 31-44.
- [18] V. Turaev, *Dijkgraaf-Witten invariants of surfaces and projective representations of groups*, J. Geom. Phys. 57 (2007) 2419-2430.
- [19] M. Wakui, *On Dijkgraaf-Witten invariant for 3-manifolds*, Osaka J. Math. 29 (1992) 675-696.
- [20] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. 121 (1989) 351-399.