Décompositions tensorielles à la Steinberg pour les représentations des catégories additives

Aurélien DJAMENT

CNRS, Laboratoire Paul Painlevé, Lille

Avril 2021

Exposé virtuel pour la deuxième rencontre de l'ANR AlMaRe

Rapport sur un travail avec Antoine Touzé et Christine Vespa
https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02103934

Un premier théorème de R. Steinberg

Théorème (R. Steinberg)

Soit $n \geq 3$ un entier. Une représentation complexe de dimension finie du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est irréductible si et seulement si elle est isomorphe au produit tensoriel d'une représentation irréductible factorisant par le morphisme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/i)$ induit par la réduction modulo un certain entier $i > 0$ et d'une représentation polynomiale (c'est-à-dire dont l'action est donnée par des polynômes en les coefficients des matrices) irréductible de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.
De plus, deux telles représentations irréductibles sont isomorphes si et seulement si les leurs décompositions tensorielles sont isomorphes.

Le théorème du produit tensoriel de Steinberg

Soient p un nombre premier, $q = p^r$ une puissance de p et $n \in \mathbb{N}$. On peut associer à toute partition p-restreinte (c'est-à-dire dont aucune part ne se répète plus que $p - 1$ fois) dont les parts n'excèdent pas $n - 1$ une représentation irréductible du groupe algébrique SL_n en caractéristique p. Les représentations des groupes finis $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ obtenues en prenant les points sur le corps $\mathbb{F}_q$ sont *appelées représentations élémentaires*.

Le théorème du produit tensoriel de Steinberg (2)

Théorème (R. Steinberg)

Une représentation du groupe fini $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ est irréductible si et seulement si elle est isomorphe à un produit tensoriel

$$M_0 \otimes M_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes M_{r-1}^{(r-1)}$$

où les M_i sont des représentations élémentaires et l'exposant $^{(i)}$ indique la i-ème itération de la torsion de Frobenius.
De plus, deux telles représentations sont isomorphes si et seulement si leurs décompositions sont isomorphes.

Catégories de foncteurs

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie (essentiellement) petite et K un corps commutatif. On note $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers les K-espaces vectoriels. On peut y penser comme à la catégorie des représentations sur K de $\mathcal{C}$ (à laquelle on peut penser comme à un monoïde à plusieurs objets).
La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ est une catégorie abélienne agréable : elle a assez de projectifs et d'injectifs, des (co)limites arbitraires. C'est une catégorie de Grothendieck.

On va s'intéresser au cas où la catégorie source est *additive*. Un cas particulier fondamental est celui de la catégorie $\mathrm{P}(A)$ des modules à gauche projectifs de type fini sur un anneau A.

Représentations non additives des catégories additives

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive (essentiellement) petite. On s'intéresse souvent à la catégorie $\mathrm{Add}(\mathcal{A}; K)$ des foncteurs *additifs* de $\mathcal{A}$ vers les K-espaces vectoriels, notamment en théorie des représentations, depuis les travaux d'Auslander. C'est également une catégorie abélienne agréable.

$\mathrm{Add}(\mathcal{A}; K)$ est une sous-catégorie épaisse (i.e. stable par sous-quotient et extensions), stable par limites et colimites, de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. Cependant, $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est en général beaucoup plus difficile à comprendre que $\mathrm{Add}(\mathcal{A}; K)$.

Par exemple, $\mathrm{Add}(\mathrm{P}(A); K)$ est équivalente à la catégorie des (K, A)-bimodules, mais la structure de $\mathcal{F}(\mathrm{P}(A); K)$ est encore largement inconnue lorsque $A = K$ est un corps fini.

Une motivation historique

Soient i et n des entiers naturels, V un groupe abélien. L'espace d'Eilenberg-MacLane $K(V,n)$ (i.e. espace topologique pointé dont l'homologie est V en degré n et triviale ailleurs) donne lieu, en prenant l'homologie singulière, à des foncteurs $V \mapsto H_i(K(V,n);K)$ qu'on peut voir comme des objets de $\mathcal{F}(\mathbf{Ab}^{\mathrm{tf}};K)$ (où $\mathbf{Ab}^{\mathrm{tf}}$ est la catégorie des groupes abéliens de type fini), qu'Eilenberg et MacLane ont étudiés dans les années 1950.
On sait dire beaucoup de choses sur ces foncteurs, mais il est très difficile d'en donner une description complète, dès lors que n et i ne sont pas très petits.
Ces foncteurs ne sont généralement pas additifs, mais ils possèdent une propriété fondamentale généralisant l'additivité, dégagée par Eilenberg et MacLane : la *polynomialité*.

Fonctions polynomiales

On commence (suivant Eilenberg-MacLane) par définir les fonctions polynomiales entre des groupes abéliens U et V. Pour $d \in \mathbb{N}$, on définit la d-ième *déviation* d'une fonction (ensembliste) $f : U \to V$ comme la fonction $\mathrm{dev}_d(f) : U^d \to V$ donnée par

$$\mathrm{dev}_d(f)(x_1, \dots, x_d) := \sum_{I \subset \{1,\dots,d\}} (-1)^{d-\mathrm{Card}(I)} f(x_I)\,,$$

où

$$x_I := \sum_{i \in I} x_i .$$

On dit que f est *polynomiale* de degré au plus d si $\mathrm{dev}_{d+1}(f)$ est identiquement nulle.

Foncteurs (Hom-)polynomiaux

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ des catégories additives et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ un foncteur. On dit que F est Hom-*polynomial* si, pour tous objets x et y de $\mathcal{A}$, la fonction

$$F_{x,y} : \mathcal{A}(x, y) \to \mathcal{E}(F(x), F(y))$$

donnant l'effet de F sur les morphismes est polynomiale.

Si toutes les fonctions $F_{x,y}$ sont polynomiales de degré au plus d, on dit que le foncteur F est *polynomial* de degré au plus d. (Seule cette dernière notion est classique.)

Les foncteurs Hom-polynomiaux sont généralement beaucoup plus difficiles à étudier que les foncteurs polynomiaux. Un foncteur Hom-polynomial de longueur finie est toujours polynomial.

Exemple : foncteurs élémentaires

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, la d-ième puissance tensorielle $T^d : V \mapsto V^{\otimes d}$ (où le produit tensoriel est pris sur K) définit un endofoncteur polynomial de degré d des K-espaces vectoriels. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ opère sur T^d. On appellera *foncteur élémentaire* (sur K) tout endofoncteur des K-espaces vectoriels de la forme

$$\mathrm{Im}\,(T^d \otimes M)_{\mathfrak{S}_d} \to (T^d \otimes M)^{\mathfrak{S}_d}$$

(l'application étant la norme), où M est une représentation K-linéaire simple de $\mathfrak{S}_d$. Un tel foncteur est encore polynomial de degré d.

Exemple

La d-ième puissance extérieure Λ^d est un foncteur élémentaire de degré d.

Idéaux d'une catégorie additive

Un *idéal* d'une catégorie additive $\mathcal{A}$ est un sous-foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$.

Exemple

Si A est un anneau, les idéaux de la catégorie additive $\mathbf{P}(A)$ s'identifient aux idéaux bilatères de A (l'idéal au sens usuel s'obtenant en évaluant l'idéal au sens précédent sur (A, A)).

Si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$, on dispose d'une catégorie $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ayant les mêmes objets que $\mathcal{A}$, avec pour morphismes $(\mathcal{A}/\mathcal{I})(x, y) := \mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$. On dispose d'un foncteur additif canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ qui est l'identité sur les objets.

Idéaux K-cotriviaux

Une catégorie additive $\mathcal{A}$ est dite *K-triviale* si, pour tous objets x et y de $\mathcal{A}$, les conditions suivantes sont vérifiées :

1. le groupe abélien $\mathcal{A}(x, y)$ est fini ;
2. le produit tensoriel $\mathcal{A}(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ est nul (i.e. $\mathcal{A}(x, y)$ est d'ordre inversible dans K).

La deuxième condition implique que les seuls foncteurs Hom-polynomiaux de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont les foncteurs constants.

Un idéal $\mathcal{I}$ d'une catégorie additive $\mathcal{A}$ est dit *K-cotrivial* si la catégorie $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est K-triviale.

Foncteurs antipolynomiaux

Définition

Un foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est dit *antipolynomial* s'il existe un idéal K-cotrivial $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ tel que F se factorise par le foncteur canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$.

Les foncteurs antipolynomiaux forment une classe de foncteurs en quelque sorte orthogonale à celle des foncteurs (Hom-)polynomiaux.

Décomposition globale (forme générale)

On note $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A};K)$ la sous-catégorie pleine des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{A};K)$ dont les valeurs sont des K-espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème

Soit F un foncteur de type fini de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A};K)$. Il existe un foncteur B de $\mathcal{F}(\mathcal{A}\times\mathcal{A};K)$, unique à isomorphisme près, vérifiant les propriétés suivantes :

1. *F est isomorphe à la composée de la diagonale $\mathcal{A}\to\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ et de B ;*
2. *le bifoncteur B est Hom-polynomial par rapport à la première variable : pour tout objet x de $\mathcal{A}$, le foncteur $B(-,x)$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A};K)$ est Hom-polynomial ;*
3. *il existe un idéal K-trivial $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ tel que B se factorise par le foncteur additif canonique $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}\times\mathcal{A}/\mathcal{I}$ (en particulier, B est antipolynomial par rapport à la deuxième variable).*

Décomposition globale (cas des foncteurs simples)

Théorème

Soit F un foncteur simple de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A};K)$. Il existe un foncteur B de $\mathcal{F}(\mathcal{A}\times\mathcal{A};K)$, unique à isomorphisme près, tel que :

1. *F est isomorphe à la composée de la diagonale $\mathcal{A}\to\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ et de B ;*
2. *le bifoncteur B est polynomial par rapport à la première variable ;*
3. *il existe un idéal K-trivial $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ tel que B se factorise par le foncteur canonique $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}\times\mathcal{A}/\mathcal{I}$.*

De plus, B est simple, et F et B ont le même corps d'endomorphismes. Réciproquement, si B est un bifoncteur simple vérifiant les conditions 2 et 3 précédentes, sa précomposition par la diagonale de $\mathcal{A}$ est un foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{A};K)$.

Cas d'un corps assez gros

Corollaire

Supposons que K contient toutes les racines de l'unité. Alors un foncteur de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A};K)$ est simple si et seulement s'il est isomorphe au produit tensoriel d'un foncteur simple antipolynomial et d'un foncteur polynomial simple. De plus, la décomposition est unique à isomorphisme près.

Ce corollaire est analogue au premier théorème de Steinberg que nous avons mentionné ; les démonstrations des deux énoncés présentent de nombreuses similitudes. Toutefois, leurs liens ne sont pas entièrement compris.

Corps de décomposition d'une catégorie additive

Définition

On dit que le corps commutatif K est un **corps de décomposition** de la catégorie additive essentiellement petite $\mathcal{A}$ si le corps d'endomorphismes de tout foncteur simple à valeurs de dimension finie de $\mathrm{Add}(\mathcal{A};K)$ est réduit à K.

Si A est un anneau, K est un corps de décomposition de la catégorie $\mathrm{P}(A)$ si et seulement si c'est un corps de décomposition de la K-algèbre $A^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ au sens usuel de la théorie des représentations.

Exemple

Si K est algébriquement clos, c'est un corps de décomposition de $\mathcal{A}$.

Décomposition tensorielle des simples polynomiaux

Théorème

On suppose que K est un corps de décomposition de $\mathcal{A}$. Alors un foncteur polynomial de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A};K)$ est simple si et seulement s'il est isomorphe à un produit tensoriel

$$\bigotimes_{\pi} E_\pi \circ \pi$$

indexé par un système complet de représentants des classes d'isomorphisme de foncteurs simples à valeurs de dimension finie π de $\mathrm{Add}(\mathcal{A};K)$, où les E_π sont des endofoncteurs élémentaires des K-espaces vectoriels, tous isomorphes au foncteur constant en K sauf un nombre fini d'entre eux.
De plus, les foncteurs E_π apparaissant dans cette décomposition sont uniques à isomorphisme près.

Exemple : un théorème de N. Kuhn (1)

Soient p un nombre premier, $r > 0$ un entier et $q := p^r$. Le corps fini $\mathbb{F}_q$ est un corps de décomposition de $\mathrm{P}(\mathbb{F}_q)$, et, par la théorie de Galois des corps finis, un système complet de représentants des $(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_q)$-bimodules simples est donné par les ${}^{(i)}\mathbb{F}_q$ pour $0 \leq i < r$, désignant $\mathbb{F}_q$ muni de la structure de $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel à gauche évidente, et de la structure de $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel à droite obtenue en tordant la structure évidente par la i-ème itération du morphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$.

Exemple : un théorème de N. Kuhn (2)

Le théorème précédent nous dit donc que les simples de $\mathcal{F}(\mathrm{P}(\mathbb{F}_q);\mathbb{F}_q)$ sont exactement les $E_0 \otimes E_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes E_{r-1}^{(r-1)}$, où les E_i sont des foncteurs élémentaires et l'exposant ${}^{(i)}$ indique la précomposition par la i-ème itération du foncteur de torsion de Frobenius (i.e. la tensorisation par ${}^{(i)}\mathbb{F}_q$).

Ce résultat est un analogue du théorème du produit tensoriel de Steinberg. Il avait été déjà obtenu par Kuhn (à l'aide de méthodes différentes).

Exemples d'applications : produits tensoriels (1)

L'énoncé suivant se déduit facilement de notre théorème de décomposition à la Steinberg polynomial. Aucune hypothèse sur le corps K n'est nécessaire.

Corollaire

La classe des foncteurs polynomiaux de longueur finie de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A}; K)$ *est stable par produit tensoriel.*

Exemples d'applications : produits tensoriels (2)

L'énoncé ci-dessous utilise nos *deux* théorèmes de décomposition à la Steinberg. Pour éviter un énoncé technique, nous nous limitons à une catégorie source de la forme $\mathrm{P}(A)$, où A est un anneau. Là encore, le corps commutatif K peut être quelconque.

Corollaire

La classe des foncteurs de longueur finie de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathrm{P}(A); K)$ *est stable par produit tensoriel.*

Théorème global : rôle des unipotents

Soit F un foncteur de type fini de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A}; K)$.
Si x et y sont des objets de $\mathcal{A}$, on note $u[f]$ l'automorphisme de $x \oplus y$ dont les composantes $x \to x$ et $y \to y$ sont les identités, $f : x \to y$ et $0 : y \to x$ (la lettre u abrège le mot *unipotent*).
Un sous-produit de la démonstration de notre premier théorème est le suivant :

Proposition

Le foncteur F est Hom-polynomial (resp. antipolynomial) si et seulement si $F(u[f])$ est un automorphisme unipotent (resp. absolument semi-simple) pour tout morphisme f de $\mathcal{A}$.

La décomposition de Jordan multiplicative des $F(u[f])$ permettra d'obtenir notre décomposition à la Steinberg.

Théorème global : l'idéal K-cotrivial

Si x et y sont des objets de $\mathcal{A}$, on note $\mathcal{I}(x,y)$ l'ensemble des morphismes $f \in \mathcal{A}(x,y)$ tels que, pour tout objet t de $\mathcal{A}$, l'automorphisme $F(u[f] \oplus t)$ de $F(x \oplus y \oplus t)$ soit unipotent.
L'étape clef de la démonstration du théorème consiste à établir le résultat suivant.

Lemme

$\mathcal{I}$ est un idéal K-cotrivial de $\mathcal{A}$

L'intervention du '$\oplus t$' dans la définition précédente est cruciale pour montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$. En revanche, une fois le lemme acquis, seule l'unipotence de $F(u[f])$ sera utilisée.

Suite de la démonstration

Écrivons la décomposition de Jordan multiplicative $F(u[f]) = U(f).D(f) = D(f).U(f)$, où $U(f)$ est unipotent et $D(f)$ absolument semi-simple.
Cela permet d'obtenir un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(x,y) \arrow[rr] \arrow[drr, "f \mapsto F(u[f])"'] & & \mathcal{A}(x,y) \times (\mathcal{A}/\mathcal{I})(x,y) \arrow[d, "(f,\bar{g}) \mapsto D(f).U(g)"] \\
& & \mathrm{Hom}_K(F(x \oplus y), F(x \oplus y))
\end{tikzcd}$$

(la flèche supérieure étant le morphisme de groupes abéliens canonique, et $\bar{g}$ désignant la classe de $g \in \mathcal{A}(x,y)$ dans $(\mathcal{A}/\mathcal{I})(x,y)$).

La factorisation de F

On post-compose ensuite ces fonctions avec l'application linéaire

$$\mathrm{Hom}_K(F(x\oplus y), F(x\oplus y)) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_K(F(x\hookrightarrow x\oplus y), F(x\oplus y\twoheadrightarrow y))} \mathrm{Hom}_K(F(x), F(y))$$

qui précomposée par $f \mapsto F(u[f])$ donne la fonction

$$F_{x,y} : \mathcal{A}(x, y) \xrightarrow{f\mapsto F(f)} \mathrm{Hom}_K(F(x), F(y))\ ;$$

c'est ce qui fournit la factorisation de F.

De l'unipotence à la polynomialité

Pour démontrer la propriété Hom-polynomiale par rapport à la première variable de la factorisation obtenue, on utilise le lemme élémentaire suivant :

Lemme

Soient M un groupe abélien, V un K-espace vectoriel de dimension finie d et $\rho : M \to E := \mathrm{End}_K(V)$ une fonction telle que $\rho(u+v) = \rho(u).\rho(v)$ pour tout $(u,v) \in M^2$. On suppose que ρ prend ses valeurs dans les automorphismes unipotents de V. Alors ρ définit une fonction polynomiale de degré au plus $d-1$ de M vers le groupe additif sous-jacent à E.